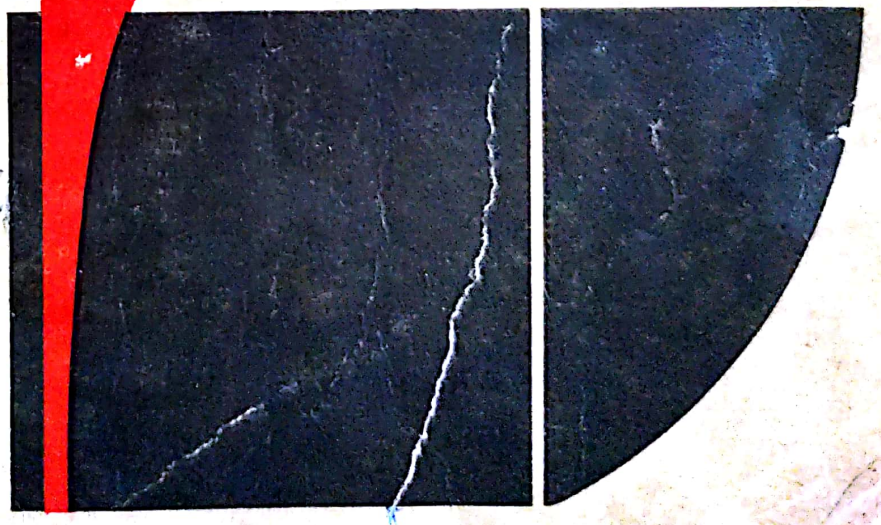
BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Exerciţii şi probleme de matematică pentru concursul de admitere în licee

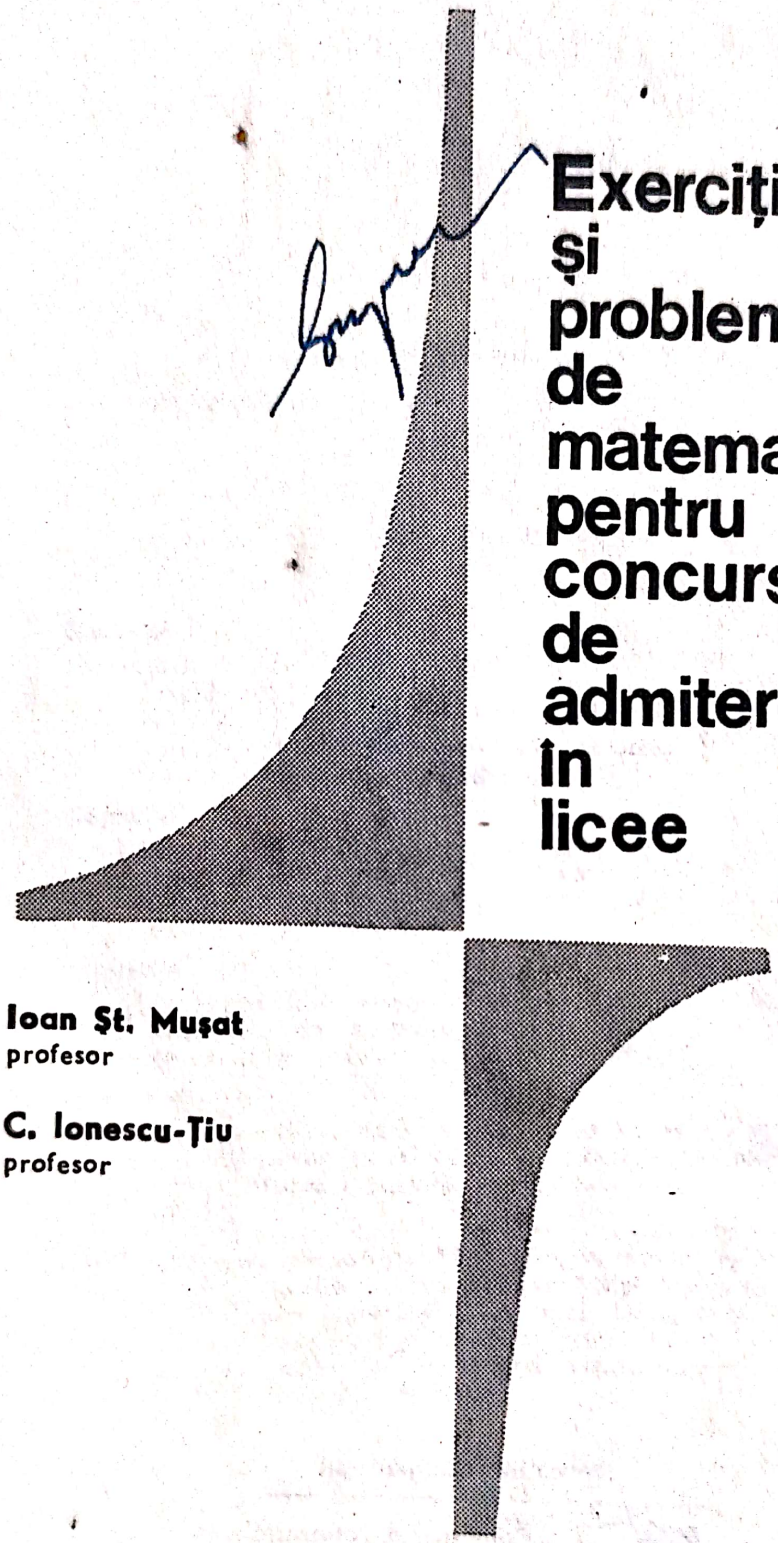
Ioan Şt. Muşat · C. Ionescu-Ţiu



Editura didactică şi pedagogică
Bucureşti, 1971

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA



Exerciții și probleme de matematică pentru concursul de admitere în licee

Ioan Șt. Mușat
profesor

C. Ionescu-Țiu
profesor

Editura didactică și pedagogică, București — 1971

Scanned with OKEN Scanner

Cuprinsul

	Pag.
Prefață	5
Notații matematice	6
Indicații generale de rezolvarea problemelor, formule, date, tabele de numere folositoare	7

Aritmetica	Enunțuri Pag.	Rezolvare indicații răspunsuri Pag.
Capitolul I	17	173
Numerația, numere întregi și zecimale, lungimi. Sistemul metric, lungimi, arii, volume, capacitate, greutăți, timp, unități metrice. Operații cu numere întregi și zecimale. Cele 4 operații, probele lor. Puterea unui număr. Ordinea efectuării operațiilor, paranteze, media aritmetică.		
Capitolul II	24	182
Divizibilitatea numerelor. Divizor, multiplu, divizibilitatea cu 2, 5, 3 și 9. Numere prime. Descompunerea în factori. Divizor comun. Cel mai mare divizor comun. Cel mai mic multiplu comun.		
Capitolul III	26	186
Fracții ordinare. Compararea fracțiilor, simplificări. Aducerea la același numitor. Operații cu fracții. Numere inverse. Fracții zecimale, finite și periodice. Transformări.		
Capitolul IV	36	201
Calcule aproximative. Valori aproximative ale unor numere, rotunjirea numerelor. Operații cu numere aproximative. Procente. Aflarea raportului procentual.		
Capitolul V	40	208
Extragerea rădăcinii pătrate. Pătratul numerelor întregi și zecimale. Pătratul unui produs și al unei fracții ordinare. Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr întreg și zecimal, dintr-un produs, dintr-o fracție ordinară. Rapoarte și proporții. Proprietăți, șir de rapoarte, proporții, medie proporțională. Proporții derivate.		
Capitolul VI	45	214
Mărimi directe și invers proporționale. Regula de trei simplă. Regula de trei compusă. Împărțirea unui număr dat în părți directe și invers proporționale. Probleme de amestec și aliaj.		
Capitolul VII	48	222
Exerciții și probleme recapitulative.		

Scanned with OKEN Scanner

	Enunțuri	Rezolvare indicații răspunsuri
	Pag.	Pag.

Algebra

Capitolul VIII 54 230

Expresii algebrice. Valoarea numerică. Operații cu polinoame. Formule de calcul prescurtat. Împărțirea monoamelor și polinoamelor, factor comun.

Capitolul IX 56 231

Operații cu fracții algebrice. Demonstrarea unor identități.

Capitolul X 64 236

Ecuații de gradul I cu o necunoscută. Sisteme de ecuații de gradul I Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor.

Capitolul XI 74 254

Probleme de gradul II. Operații cu mulțimi.
Exerciții și probleme recapitulative.

Geometria

Capitolul XII 93 262

Unghiuri. Operații cu unghiuri. Măsura unghiurilor.

Capitolul XIII 94 263

Triunghiul. Linii importante în triunghi. Poligoane. Egalitatea figurilor. Simetrie. Triunghi isoscel, echilateral. Construcții grafice. Inegalități în triunghi. Cazurile de egalitate a triunghiurilor. Perpendiculare și oblice.

Capitolul XIV 96 265

Drepte paralele. Construcții grafice. Suma unghiurilor unui poligon convex. Patrulatere. Trapez, paralelogram, dreptunghi, romb, pătrat.

Capitolul XV 99 267

Cercul. Construcții grafice. Pozițiile relative a două cercuri. Unghiuri înscrise în cerc. Măsurarea unghiurilor. Cerc înscris și circumscris triunghiului. Figuri asemenea. Segmente proporționale. Împărțirea unui segment.
Asemănarea triunghiurilor și a poligoanelor.

Capitolul XVI 107 274

Relații metrice. Media proporțională a două segmente. Proiecții. Teorema înălțimii. Teorema lui Pitagora. Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Poligoane regulate, l_3, l_4, l_6. Lungimea cercului. Arii la patrulatere, poligoane, cerc, sector de cerc.

Capitolul XVII 113 280

Geometrie în spațiu. Arii și volume. Prisma. Cilindrul. Piramida. Conul. Trunchiul de con. Sfera.

Capitolul XVIII 116 282

Exerciții și probleme recapitulative.

Capitolul XIX 126 293

Din subiectele date la lucrările scrise ale concursului de admitere în licee.

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

Lucrarea de față cuprinde exerciții și probleme de aritmetică, algebră și geometrie din materia claselor V—VIII, grupate pe capitole în funcție de chestiunile teoretice a căror cunoaștere face posibilă rezolvarea lor.

În prima parte se găsesc enunțurile exercițiilor și problemelor, iar în partea a doua, soluții, indicații sau răspunsuri. Această separare a enunțurilor de soluții s-a făcut în ideea de a da cititorilor posibilitatea ca la citirea enunțurilor problemelor să nu fie influențați de prezentarea soluțiilor, înainte de a încerca singuri a le rezolva.

Ordinea de prezentare a capitolelor este în concordanță cu aceea din programele școlare, ceea ce face ca lucrarea să intereseze elevii oricăreia dintre clasele V—VIII și îndeosebi pe cei ce se pregătesc în vederea concursului de admitere în licee.

Enunțurile exercițiilor și problemelor sînt în parte compuse de autori, altele sînt dintre cele propuse în ultimii ani la concursurile de admitere în licee sau dintre cele publicate în „Gazeta Matematică seria B".

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

Notaţii matematice

$\in$ = aparţine; $\notin$ = nu aparţine;
$\subset$ = cuprins în; $\not\subset$ = nu este cuprins în;
$\cup$ = semnul pentru reuniunea mulţimilor;
$\cap$ = semnul pentru intersecţia mulţimilor;
$\Rightarrow$ = rezultă, semnul implicaţiei;
$A \cup B = x \in A$ sau $x \in B$, reuniune;
$A \cap B = x \in A$ şi $x \in B$, intersecţie;
$A - B = x \in A$, $x \notin B$, A şi B mulţimi;
$[a]$ = partea întreagă a lui a;
$\forall x$ = oricare ar fi elementul x;
$\exists x$ = există cel puţin un element x;
$\sum_{i=1}^{n}$ = sumă după indicele i cu valori $1, 2, \ldots, n$;
$\prod_{i=1}^{n}$ = produs după indicele i cu valori $1, 2, \ldots, n$;
R = mulţimea numerelor reale;
N = mulţimea numerelor întregi pozitive;
Z = mulţimea numerelor întregi;
$\varnothing$ = mulţimea vidă (fără nici un element);
$A \triangle B = x \in A$ sau $x \in B$ dar nu lui A şi B;
$\sphericalangle x$ = unghiul x; $\sphericalangle (d_1, d_2)$ = unghiul dreptelor (d_1) şi (d_2).

Scanned with OKEN Scanner

Indicaţii generale de rezolvarea problemelor, formule, date. Tabele de numere folositoare.

Pentru a veni în sprijinul cititorilor-rezolvitori, considerăm util a reaminti unele chestiuni teoretice şi a da unele îndrumări în legătură cu rezolvarea exerciţiilor şi problemelor propuse.

Operaţii cu fracţii ordinare

1. Două sau mai multe fracţii ordinare se pot aduna (sau scădea) numai dacă au acelaşi numitor. Cînd fracţiile nu au acelaşi numitor, se aduc mai întîi la acelaşi numitor şi apoi se însumează.

Exemple:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m};$$

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}+\frac{bm}{mn}=\frac{an+bm}{mn}.$$

2. Pentru a înmulţi două sau mai multe fracţii ordinare înmulţim numărătorii între ei şi numitorii între ei. Este indicat ca înainte de efectuarea înmulţirilor să se facă toate simplificările posibile.

Exemplu:

$$\frac{a}{\cancel{b}}\cdot\frac{\cancel{c}}{d}\cdot\frac{\cancel{b}}{e}\cdot\frac{f}{\cancel{c}}=\frac{af}{de}.$$

Notă. O aplicaţie importantă a înmulţirii fracţiilor ordinare, întîlnită foarte des la rezolvarea problemelor este *aflarea valorii unei fracţii dintr-un număr* (întreg sau fracţionar).

Exemplu:

$$\frac{3}{5}\text{ din }1\frac{13}{42}\text{ este: }1\frac{13}{42}\cdot\frac{3}{5}=\frac{55}{42}\cdot\frac{3}{5}=\frac{11}{14}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Pentru a împărți două fracții ordinare, înmulțim prima fracție (deîmpărțitul) cu inversa fracției a doua (a împărțitorului).

Exemplu:

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{o} = \frac{an}{bm}.$$

Notă. O aplicație importantă a acestei operații, întîlnită, de asemenea, foarte des la rezolvarea problemelor, este *aflarea unui număr cînd se cunoaște valoarea unei fracții din el.*

Exemplu: Cunoscînd că $\frac{2}{7}$ dintr-un număr valorează (este) $2\frac{4}{21}$, numărul căutat va fi:

$$2\frac{4}{21} : \frac{2}{7} = 2\frac{4}{21} \cdot \frac{7}{2} = \frac{46}{21} \cdot \frac{7}{2} = 7\frac{2}{3}.$$

Ordinea operațiilor și folosirea parantezelor

Se știe că, prin convenție, operațiile au fost clasificate astfel: adunarea și scăderea — de ordinul întîi; înmulțirea și împărțirea — de ordinul doi; ridicarea la putere și extragerea de rădăcină — de ordinul trei.

Cînd la efectuarea unor calcule se întîlnesc operații de diferite ordine, se fac în primul rînd operațiile de ordinul trei — dacă acestea există — în al doilea rînd cele de ordinul doi și în al treilea rînd cele de ordinul întîi. Dacă într-o expresie toate operațiile sînt de același ordin, atunci ele se efectuează în ordinea în care sînt scrise.

Exemplu: În exercițiul $2 + 3 \cdot 5 - 2^2 \cdot 3 : 6 + 10 : \sqrt{25} \cdot 3$ se efectuează mai întîi ridicarea la putere și extragerea de rădăcină $2 + 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 : 6 + 10 : 5 \cdot 3$, apoi înmulțirile și împărțirile $2 + 15 - 12 : 6 + 2 \cdot 3 = 2 + 15 - 2 + 6$ și apoi adunările și scăderea, obținînd rezultatul 21.

În general, expresiile care conțin diferite operații cu numere, constituie soluții ale unor probleme. Dacă enunțul unei probleme impune efectuarea operațiilor într-o altă ordine decît cea stabilită prin convenție, atunci acest lucru este marcat prin folosirea unor paranteze.

Exemplu: Pentru completarea materialului sportiv, două tabere de pionieri cumpără anvelope de fotbal a cîte 60 lei bucata și camere a cîte 11 lei bucata. Cît a plătit fiecare tabără, dacă prima a cumpărat o anvelopă și trei camere, iar a doua trei mingi complete.

Soluție: Prima tabără a plătit $60 + 11 \cdot 3 = 60 + 33 = 93$ (lei).

A doua tabără a plătit $(60 + 11) \cdot 3 = 71 \cdot 3 = 213$ (lei).

Pentru a stabili suma plătită de tabăra a doua a fost nevoie să efectuăm mai întîi o adunare (pentru a afla costul unei mingi complete) și apoi înmulțirea cu 3. Această „abatere" de la regula stabilită prin convenție s-a făcut prin folosirea unor paranteze.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în interiorul unei paranteze există operaţii de diferite ordine, efectuarea lor se face în ordinea stabilită.

De obicei se folosesc paranteze mici sau paranteze rotunde (), paranteze mari sau paranteze drepte [] şi acolade { }.

Rapoarte şi proporţii

Reamintim că o proporţie este o egalitate a două rapoarte şi se scrie, în general, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sau $a : b = c : d$. Termenii a şi d se numesc extremi, iar b şi c mezi.

Într-o proporţie produsul mezilor este egal cu produsul extremilor (proprietatea fundamentală a proporţiilor) $ad = bc$. Rezultă de aici că într-o proporţie pot fi schimbaţi *mezii* între ei şi *extremii* între ei.

Pe baza proprietăţii fundamentale putem determina un *med* sau un *extrem*, în funcţie de ceilalţi trei termeni ai proporţiei (găsirea celui de-al patrulea proporţional).

Exemple:

1) $\frac{2,5}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1,2}$; $x = \frac{2,5 \cdot 1,2}{\frac{1}{2}} = 6$;

2) $3\frac{1}{2} : 2,4 = \frac{1}{5} x : 0,96$; $x = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 0,96}{2,4 \cdot \frac{1}{5}} = 7$.

Cu termenii unei proporţii se pot forma alte proporţii, numite *proporţii derivate*.

Exemple de proporţii derivate obţinute din proporţia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

1) $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$; 2) $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$; 3) $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$;

4) $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$; 5) $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$; 6) $\frac{a \pm c}{a} = \frac{b \pm d}{b}$;

7) $\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}$; 8) $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$; 9) $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}$;

10) $\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$.

Aplicaţii ale proporţiilor derivate. Să se găsească valoarea lui x din proporţia: $\frac{x + 2k - 1}{x - k + 1} = \frac{x + k}{x - k}$.

Scanned with OKEN Scanner

Formăm proporţia derivată 5.

$$\frac{x+2k-1+x-k+1}{x+2k-1-x+k-1}=\frac{x+k+x-k}{x+k-x+k};\quad \frac{2x+k}{3k-2}=\frac{2x}{2k}.$$

Acum formăm proporţia derivată 7, relativă la noua proporţie obţinută:

$$\frac{2x+k-2x}{2x}=\frac{3k-2-2k}{2k};\quad \frac{k}{2x}=\frac{k-2}{2k},$$

de unde

$$x=\frac{k\cdot 2k}{2\cdot(k-2)}=\frac{k^2}{k-2}.$$

Proprietatea şirului de rapoarte egale. Într-un şir de rapoarte egale suma numărătorilor pe suma numitorilor formează un raport egal cu fiecare dintre rapoartele date:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{t}{d}=\frac{x+y+z+t}{a+b+c+d}.$$

Această proprietate se foloseşte la împărţirea în părţi direct şi invers proporţionale.

Relaţia dintre masa (M), *volumul* (V) *şi masa specifică* (densitatea)(d) unui corp.

$$M=V\cdot d;\quad V=\frac{M}{d};\quad d=\frac{M}{V}.$$

Titlul unui aliaj. Prin titlul unui aliaj (T) se înţelege raportul dintre masa metalului preţios (m) şi masa totală a aliajului (M). $T=\frac{m}{M}$. Avem evident şi relaţiile $M=\frac{m}{T}$ şi $m=M\cdot T$.

Formule de calcul prescurtat:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$

Operaţii algebrice.

$a+(+a)=a+a=2a;\quad a+(-a)=a-a=0;\quad a-(+a)=a-a=0;$
$a-(-a)=a+a=2a;$

Scanned with OKEN Scanner

$(+a)\cdot(+a)=a^2$; $(+a)\cdot(-a)=-a^2$; $(-a)\cdot(+a)=-a^2$; $(-a)\cdot(-a)=a^2$;

$\frac{-a}{+a}=\frac{+a}{-a}=-1$; $\frac{a}{a}=\frac{-a}{-a}=+1$; $\frac{a}{b}$ are sens dacă $b\neq 0$.

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\ ;\ a^m:a^n=a^{m-n};\ (a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn};$$

$$+\sqrt{a^2}=|a|>0;\ -\sqrt{a^3}=-|a|<0;$$

$$\sqrt[3]{a^3}=a;\ \sqrt[3]{-a^3}=-\sqrt[3]{a^3}=-a;$$

$$\sqrt[m]{a^m}=a;\ (\sqrt[m]{a^n})^p=(\sqrt[m]{a^p})^n=\sqrt[m]{a^{np}}.$$

Triunghiul dreptunghic.

Notăm $\sphericalangle A=90°$; AD înălțimea din A; $AB=c$; $BC=a$, $AC=b$, R raza cercului circumscris triunghiului. Avem $b^2+c^2=a^2$ (Pitagora); $AD=\sqrt{BD\cdot DC}=\frac{bc}{a}$; $R=\frac{a}{2}$;

$$AB^2=c^2=a\cdot BD;\ AC^2=b^2=a\cdot DC.$$

Lungimea cercului $L=2\pi R$, unde R este raza cercului, iar $\pi\cong 3{,}14159$.

Arii. Notăm cu B baza și I înălțimea.

Aria dreptunghiului este $B\times I$.

Aria paralelogramului este $B\times I$.

Aria triunghiului este $\frac{B\times I}{2}$.

Aria rombului este $B\times I$ sau $\frac{d_1\times d_2}{2}$, unde d_1 și d_2 sînt diagonalele rombului.

Aria trapezului este $\frac{(B+b)I}{2}$, unde B și b sînt cele două baze și I înălțimea.

Aria cercului este πR^2.

Aria sectorului de cerc este $\frac{\pi R^2 n°}{360°}$, unde R este raza cercului, iar n este numărul de grade sexagesimale al unghiului la centru format de razele duse la extremitățile arcului sectorului.

Lungimea arcului de cerc fiind $L=\frac{\pi Rn°}{180°}$, aria A a sectorului se mai scrie $A=\frac{LR}{2}$.

Aria laterală a unei prisme drepte este pI, unde p este perimetrul bazei, iar I înălțimea prismei.

Scanned with OKEN Scanner

Aria laterală a unui cilindru drept este pI, unde p este perimetrul bazei, iar I înălțimea cilindrului sau $2\pi RI$ unde R este raza cercului de bază.

Aria laterală a unui con de rotație este πRG, unde R este raza cercului de bază, iar G generatoarea.

Aria laterală a trunchiului de con de rotație este $\pi G\,(R + r)$, unde R și r sînt razele celor două baze, iar G generatoarea.

Diagonala d a unui paralelipiped dreptunghic este dată de relația $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, unde a, b, c, sînt lungimile celor trei muchii ce pleacă din același vîrf.

Aria totală a paralelipipedului dreptunghic este $2\,(ab + bc + ca)$; iar *volumul* său este abc.

Aria sferei este $4\pi R^2$, unde R este raza sferei.

Volume. *Volumul unei prisme* este AI, unde A este aria bazei, iar I înălțimea prismei.

Volumul unui cilindru este AI, unde A este aria bazei, iar I înălțimea.

Volumul unei piramide este $\frac{AI}{3}$, cu aceleași notații.

Volumul unui trunchi de piramidă este $\frac{(B + b + \sqrt{Bb})I}{3}$, unde B și b sînt ariile celor două baze; iar I înălțimea trunchiului.

Volumul unui con de rotație este $\frac{\pi R^2 I}{3}$, unde R este raza cercului de bază, iar I înălțimea conului.

Volumul trunchiului de con de rotație este $\frac{\pi I\,(R^2 + r^2 + Rr)}{3}$, unde I este înălțimea trunchiului, iar R și r razele cercurilor de bază.

Volumul sferei este $\frac{4\pi R^3}{3}$, unde R este raza sferei, sau volumul sferei este $\frac{A \cdot R}{3}$, unde $A = 4\pi R^2$ este aria sferei.

Relații trigonometrice. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$;

$$\cos 0° = \sin 90° = 1;\ \cos 90° = \sin 0° = 0;$$

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3};\ \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pătratele şi rădăcinile pătrate ale numerelor întregi de la 2 la 200

N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$
2	4	1,4142	35	1225	5,9161	68	4624	8,2462
3	9	1,7321	36	1296	6	69	4761	8,3066
4	16	2	37	1369	6,0828	70	4900	8,3666
5	25	2,2361	38	1444	6,1644	71	5041	8,4261
6	36	2,4495	39	1521	6,2450	72	5184	8,4853
7	49	2,6458	40	1600	6,3246	73	5329	8,5440
8	64	2,8284	41	1681	6,4031	74	5476	8,6023
9	81	3	42	1764	6,4807	75	5625	8,6603
10	100	3,1623	43	1849	6,5574	76	5776	8,7178
11	121	3,3166	44	1936	6,6332	77	5929	8,7750
12	144	3,4641	45	2025	6,7082	78	6084	8,8318
13	169	3,6056	46	2116	6,7823	79	6241	8,8882
14	196	3,7417	47	2209	6,8557	80	6400	8,9443
15	225	3,8730	48	2304	6,9282	81	6561	9
16	256	4	49	2401	7	82	6724	9,0554
17	289	4,1231	50	2500	7,0711	83	6889	9,1104
18	324	4,2426	51	2601	7,1414	84	7056	9,1652
19	361	4,3589	52	2704	7,2111	85	7225	9,2195
20	400	4,4721	53	2809	7,2801	86	7396	9,2736
21	441	4,5826	54	2916	7,3485	87	7569	9,3274
22	484	4,6904	55	3025	7,4162	88	7744	9,3808
23	529	4,7958	56	3136	7,4833	89	7921	9,4340
24	576	4,8990	57	3249	7,5498	90	8100	9,4868
25	625	5	58	3364	7,6158	91	8281	9,5394
26	676	5,0990	59	3481	7,6811	92	8464	9,5917
27	729	5,1962	60	3600	7,7460	93	8649	9,6437
28	784	5,2915	61	3721	7,8102	94	8836	9,6954
29	841	5,3852	62	3844	7,8740	95	9025	9,7468
30	900	5,4772	63	3969	7,9373	96	9216	9,7980
31	961	5,5678	64	4096	8	97	9409	9,8489
32	1024	5,6569	65	4225	8,0623	98	9604	9,8995
33	1089	5,7446	66	4356	8,1240	99	9801	9,9499
34	1156	5,8310	67	4489	8,1854	100	10000	10

Scanned with OKEN Scanner

N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$
101	10201	10,0499	134	17956	11,5758	167	27889	12,9228
102	10404	10,0995	135	18225	11,6190	168	28224	12,9615
103	10609	10,1489	136	18496	11,6619	169	28561	13
104	10816	10,1930	137	18769	11,7047	170	28900	13,0384
105	11025	10,2470	138	19044	11,7473	171	29241	13,0767
106	11236	10,2956	149	19321	11,7898	172	29584	13,1149
107	11449	10,3441	140	19600	11,8322	173	29929	13,1529
108	11664	10,3923	141	19881	11,8743	174	30276	13,1909
109	11881	10,4403	142	20164	11,9164	175	30625	13,2288
110	12100	10,4881	143	20449	11,9583	176	30976	13,2665
111	12321	10,5357	144	20736	12	177	31329	13,3041
112	12544	10,5830	145	21025	12,0416	178	31684	13,3417
113	12769	10,6301	146	21316	12,0830	179	32041	13,3791
114	12996	10,6771	147	21609	12,1244	180	32400	13,4164
115	13225	10,7238	148	21904	12,1655	181	32761	13,4536
116	13456	10,7703	149	22201	12,2066	182	33124	13,4907
117	13689	10,8167	150	22500	12,2474	183	33489	13,5277
118	13924	10,8628	151	22801	12,2882	184	33856	13,5617
119	14161	10,9087	152	23104	12,3288	185	34225	13,6015
120	14400	10,9545	153	23409	12,3693	186	34596	13,6382
121	14641	11	154	23716	12,4097	187	34969	13,6748
122	14884	11,0454	155	24025	12,4499	188	35344	13,7113
123	15129	11,0905	156	24336	12,4900	189	35721	13,7477
124	15376	11,1355	157	24649	12,5300	190	36100	13,7840
125	15625	11,1803	158	24964	12,5698	191	36481	13,8203
126	15876	11,2250	159	25281	12,6095	192	36864	13,8564
127	16129	11,2694	160	25600	12,6491	193	37249	13,8924
128	16384	11,3137	161	25921	12,6886	194	37636	13,9284
129	16641	11,3578	162	26244	12,7279	195	38025	13,9642
130	16900	11,4018	163	26569	12,7671	196	38416	14
131	17161	11,4455	164	26896	12,8062	197	38809	14,0357
132	17424	11,4891	165	27225	12,8452	198	39204	14,0712
133	17689	11,5326	166	27556	12,8841	199	39601	14,1067
						200	40000	14,1421

Scanned with OKEN Scanner

Numerele prime de la 1 la 2 500

1	127	293	487	677	887	1097	1319	1553	1783	2017	2269
2	131	307	491	683	907	103	321	559	787	027	273
3	137	311	499	691	911	109	327	567	789	029	281
5	139	313		701	919	117	361	571	801	039	287
7	149	317	**503**	709	929	123	367	579	811	053	293
11	151	331	509	719	937	129	373	583	823	063	297
13	157	337	521	727	941	151	381	597	831	069	309
17	163	347	523	733	947	153	399	601	847	081	311
19	167	349	541	739	953	163	409	607	861	083	333
23	173	353	547	743	967	171	423	609	867	087	339
29	179	359	557	751	971	181	427	613	871	089	341
31	181	367	563	757	977	187	429	619	873	099	347
37	191	373	569	761	983	193	433	621	877	111	351
41	193	379	571	769	991	201	439	627	879	113	357
43	197	383	577	773	997	213	447	637	889	129	371
47	199	389	587	787		217	451	657	901	131	377
53	211	397	593	797	**1009**	223	453	663	907	137	381
59	223	401	599	809	013	229	459	667	913	141	383
61	227	409	601	811	019	231	471	669	931	143	389
67	229	419	607	821	021	237	481	693	933	153	393
71	233	421	613	823	031	249	483	697	949	161	399
73	239	431	617	827	033	259	487	699	951	179	411
79	241	433	619	829	039	277	489	709	973	203	417
83	251	439	631	839	049	279	493	721	979	207	423
89	257	443	641	853	051	283	499	723	987	213	437
97	263	449	643	857	061	289		733	993	221	441
101	269	457	647	859	063	291	**1511**	741	997	237	447
103	271	461	653	863	069	297	523	747	999	239	459
107	277	463	659	877	087	301	531	753		243	467
109	281	467	661	881	091	303	543	759	**2003**	251	473
113	283	479	673	883	093	307	549	777	011	267	477

Scanned with OKEN Scanner

Cei mai mici divizori *(d)* ai unor numere *(N)* de la 49 la 1 500

N	*d*	*N*	*d*	*N*	*d*	*N*	*d*	*N*	*d*
49	7	427	7	713	23	979	11	243	11
77	7	437	19	721	7	989	23	247	29
91	7	451	11	731	17			253	7
119	7	469	7	737	11	1 001	7	261	13
121	11	473	11	749	7	003	17	267	7
133	7	481	13	763	7	007	19	271	31
143	11	493	17	767	13	027	13	273	19
161	7	497	7	779	19	037	17	309	7
169	13			781	11	043	7	313	13
187	11	511	7	791	7	057	7	331	11
203	7	517	11	793	13	067	11	333	31
209	11	527	17	799	17	073	29	337	7
217	7	529	23	803	11	079	13	339	13
221	13	533	13	817	19	081	23	343	17
247	13	539	7	833	7	099	7	349	19
253	11	551	19	841	29	111	11	351	7
259	7	553	7	847	7	121	19	357	23
287	7	559	13	851	23	127	7	363	29
289	17	581	7	869	11	133	11	369	37
299	13	583	11	871	13	139	17	379	7
301	7	589	19	889	7	141	7	387	19
319	11	611	13	893	19	147	31	391	13
323	17	623	7	899	29	157	13	393	7
329	7	629	17	901	17	159	19	397	11
341	11	637	7	913	11	169	7	403	23
343	7	649	11	917	7	1 177	11	411	17
361	19	667	23	923	13	183	7	417	13
371	7	671	11	931	7	189	29	421	7
377	13	679	7	943	23	199	11	441	11
391	17	689	13	949	13	207	17	457	31
403	13	697	17	959	7	211	7	463	7
407	11	703	19	961	31	219	23	469	13
413	7	707	7	973	7	241	17	477	7

Scanned with OKEN Scanner

Aritmetica

Capitolul I

1.1. Cinci elevi pleacă într-o excursie, aducînd respectiv, sumele: 80, 90, 110, 115 şi 125 lei. Fiecare din ei a cheltuit aceeaşi sumă. La înapoiere elevilor le-au rămas 120 lei necheltuiţi. Cum se împarte acest rest între cei 5 elevi?

1.2. Să se împartă 100 lei la trei persoane, astfel ca primele două să aibă împreună 72 lei, iar ultimele două 59 lei.

1.3. Trei persoane au împreună 200 lei. Cît are fiecare dacă primele două au 143 lei, iar ultimele două 115 lei?

1.4. Un muncitor, muncind timp de 25 de zile cîte 8 ore pe zi, primeşte 1 800 lei. Cît ar primi în 6 zile dacă ar lucra cîte 10 ore pe zi?

1.5. O şină de cale ferată are, la temperatura de 15°C, o anumită lungime. Încălzită la 40°C şina se lungeşte cu 3,4 mm. Cu cît se va scurta la temperatura de —30°C, faţă de lungimea avută la început?

1.6. Un muncitor a avut de executat patru axe cu diametrul $D = (56{,}6 \pm 0{,}2)$ mm. La control s-a constatat următorii diametri în mm: primul 56,9, al doilea 56,7, al treilea 56,5 şi al patrulea 56,4. Cîte axe au fost acceptate? Cele neacceptate mai pot fi corectate şi cum?

1.7. Un strungar a avut de executat 6 axe cu diametrul de 54,7 mm admiţînd o eroare de cel mult 0,2 mm. La controlul făcut s-au găsit următorii diametri: 55,1; 54,9; 54,5; 54,4; 54,8 şi 55 mm. Cîte axe au fost acceptate? Care din cele rebutate le-ar mai putea corecta la strung?

1.8. Să se afle suma numerelor de la 1 la 1 000 care au cifra 2 de două ori.

G.M.F.B., 1962, pag. 758

1.9. Pentru a se numerota paginile unui dicţionar au fost necesare 2 322 de cifre. Cîte pagini a avut dicţionarul?

Scanned with OKEN Scanner

1.10. Pentru paginarea unei cărți s-au întrebuințat 1 212 cifre. Cîte pagini are cartea?

1.11. Un elev începe să numere pe degete astfel: degetul mare 1, degetul arătător 2, mijlociul 3, inelarul 4, degetul mic 5; apoi în sens invers: inelarul 6, mijlociul 7, arătătorul 8, degetul mare 9, arătătorul 10 și așa mai departe. După cîtva timp își propune să afle care va fi degetul cînd ajunge la 1965. Atunci se oprește și după ce se gîndește găsește rezultatul exact. Să întreabă cum a gîndit și care este rezultatul?

G.M.B., 1964, pag. 86

1.12. Cum putem aduce 6 dm^3 apă de la un rîu dacă avem numai un vas de 4 dm^3 și unul de 9 dm^3?

G.M.F.B., 1960, pag. 495

1.13. Să se demonstreze că dintre toți oamenii care au trăit pe pămînt și care trăiesc și astăzi, numărul de oameni care au efectuat un număr impar de strîngeri de mînă este par.

1.14. Din opt bile, una este mai grea decît celelalte șapte care au greutăți egale. Să se explice cum, numai din trei cîntăriri, se poate stabili care este bila mai grea.

1.15. O lădiță conține struguri. Din trei cîntăriri, cu o balanță și două greutăți de 50 g și de 200 g, trebuie să se ia 2 kg de struguri. Arătați cum trebuie procedat.

1.16. Pe un șantier, în patru clădiri, sînt cazați 436 de muncitori. În prima clădire sînt cu 10 muncitori mai mult decît în clădirea a patra, unde sînt cu 8 muncitori mai mult decît în clădirea a treia, iar în clădirea a doua sînt cu 10 muncitori mai mult decît în a treia. Să se afle cîți muncitori sînt în fiecare clădire?

1.17. O barcă cu motor face pe o apă stătătoare 20 km/oră, iar în sensul unei ape curgătoare a făcut 48 km în două ore. În cît timp va face barca cei 48 km la înapoiere, împotriva apei.

1.18. Distanța București—Dornești este de 480 km. La ora 12 pleacă din București spre Dornești un tren personal care face 40 km pe oră, iar la ora 14 pleacă din Dornești spre București un tren accelerat. Cîți kilometri pe oră face accceleratul dacă cele două trenuri se întîlnesc la mijlocul drumului?

1.19. Distanța dintre două orașe este de 600 km. Dintr-un oraș pleacă spre celălalt două trenuri la ore diferite. Primul merge cu 50 km/oră. Ce viteză are al doilea tren, dacă primul pleacă cu o oră mai devreme și ajunge cu o oră mai tîrziu?

G.M.F.B., 1961, pag. 500

1.20. Un automobil care mergea tot timpul cu aceeași viteză s-a aflat la ora 10 și 30 minute la distanța de 30 km față de locul de pornire, iar la ora 11 fără 10 minute la distanța de 70 km față de locul de pornire. Să se calculeze viteza automobilului.

Scanned with OKEN Scanner

1.21. Două automobile pleacă în același timp, primul din A spre B cu viteza de 75 km/oră și al doilea din B spre A cu o viteză de 60 km/oră. Ele se întîlnesc la 30 km depărtare de jumătatea distanței dintre A și B. Să se afle: *a*) după cîte ore s-au întîlnit, *b*) care este distanța dintre A și B.

G.M.B., 1959, pag. 689

1.22. Două automobile pleacă unul din București spre Ploiești și celălalt din Ploiești spre București. Primul are viteza de 40 km/oră și pleacă la orele 7, al doilea are viteza de 60 km/oră și pleacă la orele 8. Să se afle la ce distanță și la ce oră se vor întîlni, dacă distanța dintre cele două orașe este de 60 km.

1.23. Două trenuri pleacă din stațiile A și B unul spre celălalt. Primul tren are viteza de 42 km/oră, iar al doilea, care pleacă cu două ore mai tîrziu, are o viteză de 56 km/oră. Distanța dintre stații fiind de 476 km, se cere să se afle:

a) după cîte ore de la plecarea primului tren, se vor întîlni cele două trenuri;

b) la cîte ore, de la plecarea primului tren, ar trebui să plece al doilea, pentru ca întîlnirea să aibă loc la mijlocul distanței dintre stații.

1.24. De pe ce suprafață de pămînt se va produce grîul folosit la fabricarea pîinii necesare, pe timp de 365 de zile, unui oraș de 1 944 000 de locuitori, cu o consumație zilnică de 7 pîini la 12 locuitori, dacă un hl de grîu cîntărește 84 kg. Se știe că din 92 kg grîu se extrag 73 kg făină, din 35 kg făină se fac 46 de pîini și un hectar produce, în medie, 25 hl grîu.

1.25. Un muncitor trebuia să lucreze cîte 15 piese pe zi, pentru a-și îndeplini norma în 24 de zile. Dar, avînd condiții bune de lucru, el își îndeplinește norma în 20 de zile. Să se afle cu cîte piese a lucrat mai mult pe zi decît a avut planificat.

G.M.F.B., 1963, pag. 432

1.26. Depășind norma cu 5 piese pe zi, un strungar realizează în 6 zile 510 piese de același fel. Care a fost norma zilnică a strungarului?

1.27. Suma a trei numere întregi este 1 000. Să se afle aceste numere știind că al doilea fiind împărțit cu primul dă restul zero și cîtul 7, iar al treilea fiind împărțit cu al doilea dă cîtul 9 și restul 6.

1.28. Suma a trei numere este 30. Suma primului număr cu dublul celui de-al doilea întrece cu 2 suma celui de al doilea cu triplul celui de-al treilea. Care sînt numerele dacă primul este media aritmetică a celorlalte două.

1.29. S-a vîndut fasole cu 4,80 lei kilogramul și făină cu 4 lei kilogramul și s-au încasat 840 lei. Știind că s-a vîndut de trei ori mai multă făină decît fasole, să se calculeze ce cantități s-au vîndut din fiecare.

1.30. Să se găsească un enunț corect al unei probleme astfel încît rezolvarea problemei să fie dată de calculele de mai jos: $300 \cdot 3 = 900$; $400 \cdot 2 = 800$; $900 + 800 = 1700$; $2000 - 1700 = 300$.

G.M.F.B., 1961, pag. 102

1.31. Trei strungari lucrează într-un atelier la 3 strunguri cu turaţii diferite. Primul strung face 360 de ture pe minut, al doilea 270 şi al treilea 240. Pentru o piesă fiecare strung face 900 de rotaţii. Cîte piese pot fi lucrate în medie de atelier într-o oră?

G.M.B., 1959, pag. 108

1.32. Din oraşul A, situat la 1 060 km de B, porneşte la ora 8 dimineaţa un tren care face cu 15 km pe oră mai puţin decît un alt tren ce porneşte din B către A, la ora 6 dimineaţa. Cu ce viteză medie pe oră mergeau cele două trenuri dacă ele s-au întîlnit la ora 6 seara?

1.33. Costel merge cu un kilometru pe oră mai mult decît Ionel şi astfel în trei ore străbate distanţa pe care Ionel o face în 4 ore. Care este iuţeala de mers a fiecăruia?

1.34. Un muncitor a produs într-o zi 600 de şuruburi de două mărimi. A doua zi a produs de 4 ori mai multe şuruburi decît în prima zi, şi anume: de 3 ori mai multe şuruburi mari şi de 6 ori mai multe şuruburi mici. Cîte şuruburi mari şi cîte şuruburi mici a produs acel muncitor în fiecare din cele două zile?

G.M.F.B., 1959, pag. 182

1.35. O brigadă de tractorişti poate ara o tarla în 8 zile. După ce ară jumătate din tarla, se măreşte productivitatea arînd cu 6 ha mai mult pe zi şi termină astfel de arat tarlaua cu o zi mai devreme. Să se afle aria tarlalei şi cît s-a arat pe zi de fiecare dată.

G.M.B., 1961, pag. 437

1.36. O carte costă cu 16,50 lei mai mult decît un caiet. Preţul acestei cărţi este cît preţul a 8 caiete şi încă 75 bani. Să se afle cît costă 3 cărţi şi 7 caiete împreună.

1.37. Costul unui aparat electrocasnic, de 1800 lei, a fost plătit în bancnote a cîte 25 lei şi a cîte 3 lei, în total plătind 182 de bancnote. Să se afle cîte bucăţi au fost a 25 lei şi cîte a 3 lei.

G.M.B., 1961, pag. 244

1.38. Într-o cooperativă agricolă de producţie de pe 100 ha s-au recoltat 2 800 q grîu. De pe unele ha s-au recoltat cîte 30 q, iar de pe altele cîte 20 q. De pe cîte ha s-au recoltat cîte 30 q la ha şi de pe cîte s-au recoltat cîte 20 q la ha?

1.39. Doi pionieri A şi B au împreună 24 lei. Dacă partea lui A ar fi de două ori mai mare, iar aceea a lui B de cinci ori mai mare, ei ar avea împreună 72 lei. Cît de mare este partea lui A şi cît cea a lui B?

1.40. Casa de bilete a unui teatru a vîndut pentru un spectacol bilete de 7 lei şi de 4 lei, în total 625 de bilete şi a încasat 2 965 lei. Cîte bilete au fost de 4 lei?

G.M.B., 1960, pag. 751

1.41. O garnitură de tren are în total 30 de vagoane cu cîte două şi cu cîte patru osii, în total sînt 84 de osii. Se întreabă cîte vagoane sînt cu patru osii şi cîte cu două osii.

1.42. La o librărie s-au vîndut caiete cu 0,90 lei bucata şi cu 0,50 lei bucata. Pentru 64 caiete s-au încasat 46 lei. Să se afle cîte caiete de 0,90 lei s-au vîndut şi cîte de 0,50 lei bucata.

1.43. S-au cumpărat cu 160 lei 140 caiete, unele la preţul de 1 leu bucata, iar altele la preţul de 2,25 lei bucata. Cîte caiete de fiecare fel s-au cumpărat?

1.44. Un elev cumpără în total 32 cărţi de cîte 2 lei şi de cîte 5 lei cu suma de 100 lei. Cîte cărţi de fiecare fel a cumpărat?

1.45. Un bazin cu o capacitate de 1 960 litri este umplut într-o oră de 7 robinete cu debite de 230 l/oră şi de 300 l/oră. Să se afle cîte robinete sînt cu debitul de 230 l/oră şi cîte cu debitul de 300 l/oră.

1.46. Într-un vagon s-au pus 11,8 tone de grinzi de brad şi de stejar, în total 30 grinzi. O grindă de brad cîntăreşte 0,28 tone, iar una de stejar 0,48 tone. Să se calculeze cîte grinzi de brad şi cîte de stejar s-au aşezat în acel vagon.

1.47. Un tren are în total 60 vagoane. Unele vagoane au cîte două osii, iar altele au cîte patru osii. Să se afle cîte vagoane au cîte două osii, dacă în total sînt 168 osii.

1.48. Pentru extinderea plantaţiei cu pomi fructiferi, o cooperativă agricolă de producţie a cumpărat puieţi de meri şi de pruni, plătind un puiet de măr cu 5 lei şi unul de prun cu 3 lei. Ştiind că puieţii au costat 1 265 lei şi că au fost cumpăraţi mai mulţi meri decît pruni, să se calculeze numărul maxim de puieţi pe care-i va planta cooperativa.

G.M.B., 1963, pag. 180

1.49. O fermă agricolă are 920 ha pămînt arabil, fîneţe şi păşune. Pămîntul arabil este de 3 ori cît păşunea, iar fîneaţa este cu 200 ha mai puţin decît pămîntul arabil. Să se calculeze ariile pămîntului arabil, păşunii şi fîneţii.

1.50. Pentru 3 metri de pînză s-au plătit 2 bancnote de aceleaşi valori şi s-a primit 8 lei rest. Altădată, pentru 8 metri de aceeaşi pînză s-au plătit 4 bancnote de aceeaşi valoare ca prima dată şi încă 12 lei. Se cere: costul unui metru de pînză şi ce valoare are o bancnotă.

G.M.B., 1962, pag. 301

1.51. Două brigăzi, care au în total 18 tractoare, au arat în 8 zile 656 ha. Un tractor din prima brigadă ară 4 ha pe zi, iar unul din a doua brigadă ară 5 ha pe zi. Cîte tractoare sînt în fiecare brigadă şi ce arie a avut de arat fiecare din ele?

G.M.F.B., 1963, pag. 685

1.52. Un elev cumpără 3 cărţi şi 2 caiete şi plăteşte 17,95 lei. Altădată, preţul rămînînd acelaşi, pentru 8 cărţi şi 10 caiete plăteşte 53 lei. Care este preţul unei cărţi şi al unui caiet?

Scanned with OKEN Scanner

1.53. Un elev cumpără 2 caiete şi 3 cărţi plătind 17 lei. Ştiind că o carte costă cît 3 caiete şi încă 2 lei, care este preţul unei cărţi şi al unui caiet?

1.54. Consiliul popular al unei comune are o sumă de bani cu care vrea să clădească un cămin cultural şi un pod. Dacă s-ar dubla suma destinată pentru pod, în detrimentul celei destinate căminului, atunci costul podului ar fi cu 10 000 lei mai ridicat decît preţul căminului; dacă s-ar dubla suma alocată pentru construcţia căminului, atunci nu s-ar mai putea construi podul şi ar mai trebui încă 50 000 lei pentru a se construi căminul cultural. Ce sumă s-a destinat iniţial pentru fiecare construcţie?

G.M.F.B., 1958, pag. 733

1.55. În trei biblioteci sînt 6 309 cărţi. În prima bibliotecă sînt de trei ori mai multe cărţi decît în a doua şi încă o carte; în a treia bibliotecă sînt cu o carte mai puţin decît jumătate din numărul cărţilor din a doua bibliotecă. Cîte cărţi sînt în fiecare bibliotecă?

1.56. Grîul unei cooperative agricole de producţie este depozitat în trei magazii de diferite mărimi. În prima magazie este de trei ori mai mult grîu decît în a treia, iar a doua are cu 5,4 tone mai puţin decît prima magazie. Cît grîu se află în fiecare magazie dacă în cele trei magazii se află în total 205,37 tone grîu.

1.57. O cooperativă agricolă de producţie a cultivat cu porumb 120 ha în trei tarlale şi a obţinut producţii medii pe hectar după cum urmează: de pe prima tarla 32 q/ha, de pe a doua 41 q/ha, iar de pe tarlaua a treia 50 q/ha. Ştiind că prima tarla este de trei ori mai mare decît a treia şi că în total s-au recoltat 4 560 q porumb, să se afle aria fiecărei tarlale.

G.M.B., 1964, pag. 316

1.58. La o cooperativă sătească de consum s-au vîndut într-o zi 10 m de stambă şi 22 m şifon, cu suma de 780 lei. În altă zi 20 m stambă, 24 m şifon şi 12 m stofă cu 2 400 lei. Ştiind că stofa este de 4 ori mai scumpă decît şifonul, să se afle cît costă un metru din fiecare fel de material.

G.M.B., 1961, pag. 570

1.59. Tatăl este de 3 ori mai în vîrstă decît fiul, iar acesta cu 25 de ani mai tînăr decît mama. Ştiind că împreună au 110 ani, să se afle cîţi ani are fiecare.

1.60. Trei pionieri au depus într-o săptămînă la C.E.C. împreună suma de 45 lei. Dacă suma celui de-al doilea s-ar dubla, iar a celui de-al treilea s-ar tripla, ei ar avea împreună 84 lei. În cazul cînd suma celui de-al doilea se triplează, iar a celui de-al treilea se dublează, suma creşte cu încă 3 lei faţă de situaţia precedentă. Ce sumă a depus la C.E.C. fiecare pionier?

G.M.B., 1961, pag. 438

1.61. O motocicletă, o motoretă şi o bicicletă costă împreună 14 880 lei. Ştiind că motoreta costă cu 4 950 lei mai puţin decît motocicleta şi cu 3 720 lei mai mult decît bicicleta, să se afle cît costă fiecare.

G.M.F.B., 1960, pag. 749

Scanned with OKEN Scanner

1.62. La un magazin sînt trei bucăţi de stofă. În prima bucată sînt cu 12 m mai puţin decît în a doua şi cu 4 m mai mult decît în a treia, în total fiind 89 m. Cîţi metri are fiecare bucată?

1.63. Într-o cooperativă agricolă de producţie două echipe au scos sfeclă de zahăr. Dacă prima echipă lucrează 18 zile, iar a doua 16 zile termină parcela prevăzută, precum şi dacă prima echipă lucrează 21 zile şi a doua 12 zile. În cît timp fiecare echipă în parte termină lucrarea?

G.M.B., 1960, pag. 494

1.64. La o întrecere în rezolvări de probleme se dau cinci puncte pentru o problemă bine rezolvată şi se scad trei puncte pentru o problemă rezolvată greşit. Un elev a trimis rezolvările la 10 probleme şi a obţinut 26 puncte. Să se afle cîte probleme a rezolvat corect şi cîte a greşit.

1.65. Cu mai mulţi ani în urmă, într-un orăşel, erau la dispoziţia călătorilor care mergeau din gară spre centru, tot atîtea trăsuri cîte autobuze sînt acum, iar autobuze mai puţin cu unul faţă de numărul trăsurilor existente în prezent. Acum numărul autobuzelor este de 8 ori mai mare decît numărul trăsurilor şi cu 8 mai mare decît numărul autobuzelor existente în trecut. Cîte trăsuri şi autobuze erau în trecut şi cîte sînt în prezent?

G.M.F.B., 1963, pag. 783

1.66. Un tată este cu 39 ani mai mare decît fiul său, iar peste 7 ani va avea de 4 ori vîrsta fiului său. Cîţi ani are fiecare?

1.67. Trei pionieri au cumpărat o cantitate de nuci. Unul din ei a împărţit nucile prin numărare în trei părţi egale şi şi-a luat o parte. La fel a procedat fiecare pionier cu nucile rămase după operaţia făcută de precedentul său şi au rămas la urmă 48 nuci. Cîte nuci au fost la început?

1.68. Am o sumă de bani. Dublez această sumă şi iau după aceea din ea 20 lei. Suma obţinută astfel o dublez iarăşi şi iau din ea din nou 20 lei. A treia oară, dublez suma rămasă, iau din ea 20 lei şi nu mai rămîne nimic. Care a fost suma la început?

1.69. Să se arate că:

$$(1 + 2^2 + 3^3) : 2^5 = 19^2 : (4^4 + 5^3 - 20) = 1;$$
$$(1 + 2^2 + 3^3) : 19^2 = (4^4 + 5^3 - 20) \cdot 2^5;$$
$$(1 + 2^2 + 3^3) : (4^4 + 5^3 - 20) = 2^5 : 19^2;$$
$$(4^4 + 5^3 - 20) - (1 + 2^2 + 3^3) = 19^2 - 2^5.$$

1.70. Să se arate că $205_6 + 413_5 = 353_7$, unde indicii 6,5,7 arată bazele de numeraţie în care sînt scrise numerele respective.

G.M.F.B., 1963, pag. 563

Scanned with OKEN Scanner

1.71. Să se arate că avem egalităţile:

$34514_6 + 12321_4 = 5383_{10}$ şi $1010101_2 - 333_4 = 22_{10}$.

Indicii 2, 4, 6, 10 arată baza sistemului de numeraţie.

G.M.B., 1964, pag. 459

1.72. Să se arate că:

$(10010_2 + 1120_3) \cdot 121_4 - 4000_5 = 32_6 \cdot 101_7$,

unde indicii indică bazele de numeraţie în care sînt scrise numerele respective.

G.M.B., 1964, pag. 561

1.73. Să se găsească numărul x ştiind că:

$$[20(x : 40 - 24) \cdot 7\,500 : 15 - 9\,980]40 = 800.$$

1.74. Să se afle numărul x ştiind că:

$$[(x : 32 - 20) : 15 \cdot 4\,000 - 192\,000] : 40 = 800.$$

1.75. Întreitul unui număr mărit cu 2 a fost înmulţit cu 5. Produsul obţinut micşorat cu 4 a fost împărţit la 7 şi s-a obţinut 18. Care este numărul cu care s-a pornit la calcule?

Capitolul II

2.1. O şcoală cumpără 10 mingi de handbal cu camerele respective şi un număr de camere de rezervă. Ştiind că o cameră costă un număr întreg de lei, că se plătesc 91 lei pentru toate camerele cumpărate şi că o minge costă cît nouă camere, să se determine numărul total de camere cumpărate, preţul unei camere şi al unei mingi.

G.M.F.B., 1960, pag. 179

2.2. Fără a se face adunarea să se arate că:

$$N = 233 + 257 + 428 + 7\,964 + 5\,164 + 174$$

este multiplu de 30.

2.3. Să se arate că dacă unui număr oarecare i se adaugă de 8 ori suma cifrelor sale se obţine un număr divizibil prin 9.

2.4. Să se găsească un număr prim de trei cifre, ştiind că produsul cifrelor lui este 252.

2.5. Care este cel mai mic număr care înmulţit cu 1 971 ne dă un pătrat perfect?

2.6. O bucată de săpun scoasă din fabrică are forma de paralelipiped dreptunghic lung de 100 cm, lat de 80 cm şi gros de 50 cm. Se desface prin tăieturi

Scanned with OKEN Scanner

paralele cu feţele, în bucăţi cubice de aceeaşi mărime şi se întreabă: care este cel mai mic număr de bucăţi cubice în care se poate desface săpunul şi cît de mare este fiecare bucată?

2.7. Două roţi dinţate sînt angrenate împreună. Înainte de a se pune în mişcare se însemnă cu cretă cei doi dinţi ai ambelor roţi din locul de contact. Ştiind că roata mare are 1 965 de dinţi şi cea mică are numai 262 de dinţi, să se afle cîte rotaţii vor face fiecare din roţi pînă cînd cei doi dinţi însemnaţi cu cretă vor ocupa acelaşi loc ca la începutul mişcării.

2.8. Să se afle numerele mai mici decît 200 care la împărţirea prin 3, 4, 5 dau restul 2.

2.9. Să se afle cel mai mic număr care împărţit la 3, 4, 5, 8, 9 ne dă de fiecare dată rest unu.

2.10. Să se găsească cel mai mic număr care împărţit cu 3, 15, 7 şi 28 să dea acelaşi rest 2.

2.11. Să se afle cel mai mic număr care împărţit cu 5, 7, 8 să dea acelaşi rest 4.

2.12. Să se găsească cel mai mic număr care împărţit prin 6, 8, 9, 12 şi 16 să dea acelaşi rest 4.

2.13. Dintr-un port pleacă la aceeaşi oră trei vapoare: unul face cursa dus şi întors în 120 ore, altul în 126 ore şi celălalt în 216 ore. Se întreabă după cîte ore vor pleca din nou toate vapoarele la aceeaşi oră, considerînd în timpul de mers şi staţionările în porturi.

2.14. Un elev are în biblioteca sa cărţi de 3 grosimi diferite: de 1,8 cm; de 2,5 cm şi de 2 cm. El vrea să construiască un raft pe care să le aşeze. *a)* Să se afle care este lungimea cea mai mică a raftului pentru ca pe acesta să încapă un număr întreg de cărţi din fiecare categorie? *b)* Să se găsească numărul cărţilor din fiecare categorie, care încap în raftul astfel construit.

2.15. Trei autobuze pleacă dintr-o piaţă la orele 6 dimineaţa, în trei direcţii diferite şi se întorc în felul următor: primul după o oră şi un sfert şi pleacă din nou după 5 minute pe acelaşi traseu; al doilea se întoarce după o oră şi 30 minute şi pleacă din nou după 6 minute, al treilea se întoarce după o oră şi 52 minute şi pleacă din nou după 8 minute. La ce oră vor pleca din nou în acelaşi timp cele trei autobuze?

2.16. Într-o şcoală sînt mai puţin de 200 pionieri; formînd grupe de cîte 6, de cîte 7 sau de cîte 8 pionieri, rămîne mereu cîte o grupă incompletă de cîte 5 pionieri. Cîţi pionieri sînt în acea şcoală?

2.17. Se împart numerele 4 373 şi 826 printr-un acelaşi număr x întreg şi se obţine ca rest respectiv 8 şi 7. Care este x? Verificare.

Scanned with OKEN Scanner

2.18. Dacă împărțim numerele 9 428 și 3 235 prin același număr obținem respectiv restul 13 și 7. Care este împărțitorul?

2.19. Să se arate că nu există nici un număr care împărțit cu 16 să dea restul 4 și împărțit la 20 să dea restul 5.

2.20. Cunoscînd că produsul a două numere este 4 851 000 și cel mai mare divizor comun al lor este 210, să se afle cele două numere.

2.21. Să se afle două numere știind că produsul lor este egal cu 6 750 și că *c.m.m.d.c.* al lor este 15.

2.22. Cel mai mare divizor comun a două numere este 54, iar *cîtul* lor este 0,8. Să se afle cele două numere.

2.23. Să se afle două numere știind că raportul lor este 2/3, iar *c.m.m.d.c.* este 24.

2.24. Să se afle două numere știind că raportul lor este 6/11, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 1 386.

G.M.F.B., 1961, pag. 437

2.25. Să se găsească numerele A și B știind că admit pe 40 ca cel mai mare divizor comun și pe 3 600 ca cel mai mic multiplu comun.

2.26. Care este cel mai mare număr de forma $\overline{abab}$, care să aibă cel mai mic număr de divizori.

G.M.B., 1964, pag. 118

2.27. Să se afle cifrele a și b consecutive astfel încît numărul $\overline{124\,ab}$ să fie divizibil cu 18.

Capitolul III

3.1. O cooperativă agricolă de producție, din cele 1 800 ha, are repartizate pe tarlale: pentru vii și grădini 1/3; pentru grîu 1/4; pentru orz 1/5, pentru porumb 1/6, iar restul cuprinde aria repartizată pentru nutreț. Să se afle aria fiecărei tarlale.

G.M.B., 1960, pag. 179

3.2. Un strungar lucrează la strung 8 piese într-o oră, cu o viteză de tăiere de 4 mm pe secundă. Cîte piese de același fel ar lucra pe oră, dacă viteza de tăiere ar crește la 6 mm pe secundă?

3.3. Pe unul din talerele unei balanțe a fost așezat un săculeț cu făină, iar pe celălalt taler pentru a face echilibru, 1/5 din masa săculețului plus încă 4/5 kg. Cît cîntărește săculețul cu făină?

Scanned with OKEN Scanner

3.4. Să se găsească trei numere, știind că jumătate din primul număr este egală cu o treime a celui de-al doilea număr sau cu pătrimea celui de-al treilea număr; iar al treilea număr este mai mare decît primul cu 6,4.

3.5. Un ceasornic rămîne în urmă cu 105 secunde în 9 ore. Să se afle cu cîte minute și secunde rămîne în urmă într-o săptămînă.

3.6. S-au vîndut $14\frac{1}{10}$ m de stofă la trei cumpărători. Celui de al doilea i s-au vîndut cu $2\frac{1}{2}$ m mai mult decît primului, iar celui de al treilea cu $1\frac{3}{5}$ m mai mult decît celui de al doilea.

Cîtă stofă a cumpărat fiecare cumpărător?

3.7. La un concurs de admitere în liceu s-au prezentat 145 candidați: băieți și fete. Să se afle cîte fete și cîți băieți au fost declarați reușiți, dacă s-au prezentat cu 65 fete mai mult decît băieți și dacă numărul reușiților este 20/21 din numărul fetelor, iar numărul băieților reușiți se raportă la numărul fetelor reușite ca 7 la 13.

3.8. Într-o baie cu volumul de 370 dm^3 curge apă prin două robinete, unul cu apă rece care dă 15 dm^3 apă în 2 minute și altul cu apă caldă care dă 40 dm^3 în 7 minute. În cît timp se umple baia, robinetele curgînd împreună? Cîtă apă rece și cîtă apă caldă va curge în baie?

3.9. Unul din hambarele unei cooperative agricole de producție are forma unui paralelipiped cu următoarele dimensiuni: lungimea de 5,4 m, lățimea cît 2/3 din lungime, iar înălțimea cu 14 dm mai mică decît lățimea. Hambarul conține grîu, 25/27 din volum. Să se afle cîți dm^3 de grîu sînt în acel hambar. Cunoscînd că masa hectolitrică a grîului este de 80 kg, se cere masa grîului din hambar.

3.10. Terenul unei grădini școlare a fost repartizat astfel: 0,32 din el pentru cartofi, 0,28 pentru fasole; 2/7 pentru ceapă și restul pentru flori. Care este aria terenului repartizată pentru fiecare din aceste culturi, știind că pentru fasole și flori la un loc s-au repartizat 345 m^2?

3.11. O cooperativă agricolă de producție iernează 65 de vaci, asigurîndu-le cîte o rație zilnică de 20 kg fîn de fiecare timp de 90 zile. După 25 zile, mai sosesc încă 15 vaci, care sînt hrănite din același fîn, iar pentru completarea rației se mai dă cîte 1 kg grăunțe în loc de $2\frac{1}{2}$ kg fîn.

La cîte kg de fîn s-a redus rația unui animal? Cîte kg de grăunțe se mai dau în plus fiecărui animal pe zi?

3.12. Un vagonet de transportat cărbuni cîntărește, cînd este plin, 3 850 kg. Umplut numai 5/7 din volumul său cîntărește 9/11 din această greutate. Cît cîntărește vagonetul gol?

3.13. Un tractor mergînd cu o viteză de 4,8 km/oră a străbătut o anumită distanță în 3 ore și 10 minute. Cît timp va trebui tractorului pentru a parcurge aceeași distanță, dacă viteza lui se va mări la 5,7 km/oră?

Scanned with OKEN Scanner

3.14. Două vapoare pleacă o dată din același port și în aceeași direcție. Primul face $37\frac{1}{2}$ km în $1\frac{1}{4}$ ore, iar al doilea $96\frac{1}{4}$ km în $2\frac{1}{2}$ ore.

a) La ce depărtare de mal va fi fiecare din cele două vapoare după 4/5 ore?

b) La ce depărtare vor fi unul de altul la 4/5 ore de la plecare?

3.15. Doi drumeți pleacă în același timp din orașul A spre orașul B situat la $27\frac{1}{2}$ km, unul cu viteza de $3\frac{1}{8}$ km/h, iar al doilea cu $3\frac{3}{4}$ km/h. Se cere:

a) La ce distanță vor fi unul de altul după 3 ore și 12 minute?

b) Cu cît timp ajunge mai înainte în B, unul decît celălalt?

3.16. Un tren mergînd cu viteza medie de 8,2 m/s, pleacă din Tulcea la ora 5 și 45 min și ajunge la Medgidia la ora 10 și 37 min. Alt tren, mergînd tot cu viteza medie de 8,2 m/s pleacă din Negru-Vodă și ajunge la Medgidia tot la ora 10 și 37 min, parcurgînd distanța de 64 km.

a) Care este distanța parcursă de primul tren? (Tulcea—Medgidia.)

b) La ce oră a plecat trenul al doilea din Negru-Vodă?

3.17. Un biciclist a plecat din București la ora 10, pentru a ajunge la Ploiești la ora 14, mergînd cu o viteză constantă. La kilometrul 15 i se defectează bicicleta și reparatul ei durează 30 de minute. Pentru a ajunge la timp, el își mărește viteza. Știind că a ajuns la timp, parcurgînd distanța de 60 km, să se afle cu cît și-a mărit viteza.

G.M.B., 1964, pag. 319

3.18. Un biciclist pornește de acasă la orele 7, merge cu aceeași viteză și fără întrerupere și ajunge la destinație la orele 9 și 45 minute, cu 1/4 oră mai devreme decît socotise. Știind că la orele 8 și 30 minute el trecuse de jumătatea drumului cu $1\frac{1}{2}$ km, să se afle: *a)* viteza cu care și-a propus să meargă; *b)* viteza cu care a mers; *c)* lungimea drumului parcurs.

G.M.F.B., 1963, pag. 166

3.19. Un biciclist străbate distanța dintre satele A și B în timp de 40 minute, iar un pieton străbate aceeași distanță în timp de 3 ore și 20 minute. Ambii pleacă din A spre B și se cere să se afle cu cîte minute a plecat pietonul înaintea bicicliștului, dacă după 30 minute de mers biciclistul a ajuns pietonul.

3.20. Un turist pleacă dintr-un sat la o stație de cale ferată. După ce a parcurs într-o oră 3 km, constată că va întîrzia la gară cu 40 minute dacă va merge cu aceeași viteză. De aceea, restul drumului îl parcurge cu 4 km pe oră și ajunge la gară cu 45 minute înainte de plecarea trenului. Care este distanța dintre sat și gară?

3.21. Doi pietoni au mers pe același drum și în aceeași direcție. Ei au plecat în același moment din două puncte, între care era distanța de 240 m și au ajuns în același timp la locul de destinație. Să se determine lungimea drumului străbătut

Scanned with OKEN Scanner

de fiecare pieton, știind că în timp ce primul pieton face 24 pași cel de-al doilea face numai 20 pași și că pe distanța de 100 m primul pieton face 150 pași, iar al doilea 120 pași.

3.22. Un biciclist pleacă din A spre B. După ce a parcurs jumătate din distanța de la A la B și încă un kilometru și jumătate, constată că dacă ar mai parcurge jumătate din ceea ce i-a mai rămas și un kilometru și jumătate, ar mai avea 2 kilometri pînă să ajungă în B. Cu ce viteză a mers biciclistul, dacă el a făcut de la A la B 35 minute și 25 secunde?

G.M.B., 1961, pag. 757

3.23. S-au vîndut 32 m stambă, 40 m satin, și 25 m pînză, încasîndu-se în total 1 784 lei. Cît costă un metru din fiecare material, dacă un metru de stambă este de 2 ori mai ieftin decît un metru de pînză, iar unul de satin este de 6/5 ori mai ieftin decît un metru de pînză?

3.24. Un elev depune la C.E.C. o sumă de bani. Prima oară scoate cu 43 lei mai mult ca a doua oară, cînd scoate 3/5 din banii ce i-a scos prima dată. Ce sumă a scos de la C.E.C.?

G.M.B., 1963, pag. 497

3.25. Mărind aria grădinii de zarzavat, conducerea unei cooperative agricole de producție a mai repartizat echipei însărcinate cu cultivarea grădinii 34 femei și 1/3 din numărul bărbaților pe care-l avea echipa. Numărul membrilor echipei a crescut cu 44, ajungînd egal cu de patru ori numărul bărbaților pe care-l avea echipa la început. Din cîte femei și cîți bărbați era compusă echipa la început?

G.M.B., 1963, pag. 563

3.26. Masa unei bîrne de brad este $27\frac{4}{5}$ kg, iar a unei bîrne de stejar este $45\frac{1}{2}$ kg. Masa a 10 bîrne este de $384\frac{1}{5}$ kg. Să se afle cîte bîrne sînt de stejar.

3.27. O cooperativă agricolă de producție a împărțit o parte din terenul arabil de care dispune în patru sectoare, pentru a fi semănate cu porumb, orz, grîu și cartofi. Ce arie are fiecare sector, știind că următoarele arii sînt egale: 2/3 din terenul semănat cu porumb, 4/5 din cel semănat cu orz, 2/7 din cel semănat cu grîu și 3/8 din cel semănat cu cartofi, iar partea semănată cu grîu întrece cu 90 ha sectoarele semănate cu porumb și orz împreună.

3.28. Biblioteca unui cămin cultural avea împrumutate 1/5 din cărți, cînd primește încă un număr de cărți, care reprezintă 1/6 din cele ce se mai aflau în rafturi. După aceasta se mai împrumută încă 100 cărți și rămîn în rafturi 13/17 din totalul cărților înregistrate la bibliotecă. Să se afle acest total.

G.M.B., 1958, pag. 415

3.29. Un pescar pornește cu o barcă cu motor la ora 8 dintr-un punct A, în sensul de curgere a unui rîu. La ora 8 și 30 minute pierde din barcă o scîndură, dar nu observă pierderea decît la ora 10 cînd se și întoarce înapoi după ea. Să se cal-

culeze la ce distanţă de A şi la ce oră găseşte scîndura, dacă viteza de curgere a apei este de 1 km/oră, iar viteza bărcii pe o apă stătătoare este de 3 km/oră.

3.30. După ce a parcurs 3/4 dintr-un drum, mărindu-şi viteza cu un sfert de km pe oră, un pieton a parcurs restul drumului într-un sfert de oră. Să se afle cele două viteze şi lungimea drumului parcurs, ştiind că diferenţa dintre timpul mers cu prima viteză şi timpul mers cu a doua viteză este 41/76 ore.

G.M.B., 1964, pag. 88

3.31. Dintr-un oraş pleacă în acelaşi timp spre un sat un biciclist şi un om pe jos; primul merge cu 12 km pe oră şi al doilea cu 5 km pe oră.

După cîte ore drumul ce-l mai are de făcut biciclistul este a treia parte din drumul parcurs de pieton, dacă distanţa dintre oraş şi sat este 20,5 km?

3.32. Doi pionieri merg pe un drum unul spre altul. Unul poate străbate drumul în 9 minute şi altul în 15 minute. Dacă pleacă amîndoi în acelaşi moment să se afle după cît timp se întîlnesc.

3.33. Un biciclist parcurge distanţa de la A la B în 3 ore, iar un pieton în 11 ore. Dacă pleacă în acelaşi moment biciclistul din B şi pietonul din A, după cît timp se vor întîlni?

Să se calculeze timpul în fracţiune de oră şi apoi în ore, minute şi secunde şi fracţiuni de secundă.

3.34. Doi pionieri pleacă din acelaşi loc în sensuri contrarii, dînd ocol unei piețe rotunde. Primul face un tur complet în 5 minute, iar al doilea în 3 minute. Se întreabă de cîte ori s-au întîlnit, ştiind că au mers timp de o oră.

3.35. O dactilografă poate să scrie un manuscris lucrînd singură în 8 ore, alta în 12 ore. În cît timp ar termina lucrarea, dacă ar lucra amîndouă împreună?

3.36. Un muncitor mai vîrstnic şi unul mai tînăr lucrează la aceeaşi uzină şi locuiesc în acelaşi bloc. Cel vîrstnic face drumul în 30 de minute şi cel tînăr numai în 20 de minute. Într-o dimineaţă, cel vîrstnic a plecat cu 5 minute înaintea celui tînăr. După cîte minute muncitorul cel tînăr ajunge pe cel vîrstnic?

G.M.F.B., 1960, pag. 495

3.37. O echipă de 10 zidari ar termina o lucrare în 16 zile. O altă echipă de 18 zidari ar termina aceeaşi lucrare în 12 zile. În cît timp ar termina lucrarea 5 zidari din prima echipă şi 12 zidari din a doua echipă.

3.38. Două robinete curgînd împreună pot umple un bazin în 12 ore. După 8 ore de funcţionare împreună, unul din ele a fost închis şi i-au mai trebuit celui rămas să funcţioneze 10 ore ca să umple bazinul. Să se afle timpul în care funcţionînd singure, fiecare din robinete poate să umple bazinul.

G.M.B., 1963, pag. 248

3.39. Două echipe de muncitori s-au angajat să execute o lucrare. După ce au lucrat împreună cîteva zile, prima echipă a plecat în altă parte, iar a doua a terminat lucrarea în 6 zile. Ştiind că prima echipă ar fi putut să execute singură întreaga

lucrare în 12 zile, iar a doua în 15 zile, să se afle cîte zile au lucrat împreună cele două echipe.

3.40. Un robinet umple un bazin în 12 ore, un altul în 9 ore şi un altul în 7 ore. În cît timp se umple bazinul dacă curg împreună două cîte două robinete, în timpuri egale? Dar cînd curg toate împreună?

3.41. Un bazin se umple prin trei robinete A, B şi C. Robinetele A şi B umplu bazinul în 6 ore, B şi C în 7 ore şi 30 minute, iar A şi C în 10 ore. Să se afle:

1) În cît timp se va umple bazinul de fiecare robinet în parte?
2) În cît timp se umple bazinul, dacă s-ar deschide toate robinetele deodată?

G.M.B., 1958, pag. 679

3.42. Robinetul A umple în 8 ore numai 2/3 dintr-un bazin, robinetul B umple în 6 ore numai 2/5 din acelaşi bazin, iar dacă acestora li se alătură şi robinetul C, vor umple bazinul, curgînd împreună, în 4 ore. În cît timp robinetul C poate umple singur bazinul?

3.43. Un bazin de o capacitate anumită este prevăzut cu trei ţevi de umplere. Prima ţeavă poate umple singură bazinul în 15 ore; debitul ţevii a doua este 3/5 din debitul primei ţevi, iar prin ţeava a treia intră 1/2 din cantitatea de apă ce curge, în acelaşi interval de timp, prin primele două ţevi. În cîte ore va fi plin bazinul dacă cele trei ţevi vor fi deschise deodată?

3.44. Un bazin de înot este alimentat prin două conducte. Prima, care aduce apă rece, poate umple bazinul în 5 ore, iar a doua, care aduce apă caldă, poate să-l umple în 6 ore. Evacuarea apei din bazin se face printr-o a treia conductă, care poate goli bazinul plin în 3 ore şi 36 minute.

În cît timp poate fi umplut bazinul, dacă sînt lăsate deschise toate cele trei conducte?

3.45. Un tren pleacă din Tecuci la ora 6 şi 20 minute şi ajunge în Bucureşti la ora 11 şi 50 minute. Un alt tren pleacă din Bucureşti la ora 4 şi 5 minute şi ajunge la Tecuci la ora 9 şi 50 minute. Să se calculeze la ce oră se vor întîlni trenurile?

G.M.B., 1964, pag. 128

3.46. Jumătate din drum calul a tras o căruţă goală cu viteza de 10 km pe oră. Restul drumului l-a făcut cu căruţa încărcată, cu viteza de 6 km pe oră. Care este viteza medie, adică cu ce viteză constantă ar fi trebuit să meargă calul pentru ca să fi străbătut drumul în acelaşi timp.

3.47. Un lucrător a executat în prima zi o treime din piesele pe care le avea de executat, iar a doua zi cu 3 piese mai mult decît în prima zi. Ştiind că i-au mai rămas de executat 12 piese, să se afle cîte piese a executat în prima zi de lucru.

3.48. Terenul unei cooperative agricole de producţie a fost semănat astfel: 2/5 din totalul terenului cu grîu, 3/4 din rest cu porumb, iar restul de 90 ha cu cartofi. Cîte ha s-au semănat cu grîu?

Scanned with OKEN Scanner

3.49. Ce sumă a avut cineva dacă după ce a cheltuit 3/5 şi apoi încă 2/3 din rest i-au mai rămas 240 lei.

3.50. Ce sumă a avut cineva dacă, după ce a cheltuit 3/7 din sumă, apoi 2/5 din cît îi mai rămăsese după prima cumpărătură şi încă 12 lei, constată că i-a rămas necheltuită suma de 24 lei.

3.51. O cooperativă agricolă de producţie termină prăşitul porumbului în 4 zile. Ştiind că în prima zi a prăşit 1/5 din toată suprafaţa, a doua zi 3/8 din rest, a treia zi 5/8 din noul rest, iar în a patra zi restul. Să se afle suprafaţa totală şi cît a prăşit în fiecare zi, dacă în a treia zi a prăşit cu 3 ha mai mult decît în a doua zi.

G.M.F.B., 1960, pag. 493

3.52. O cooperativă agricolă de producţie a arat terenul său în trei zile. În prima zi a arat $\frac{2}{5}$ din toată suprafaţa; a doua zi $\frac{5}{12}$ din rest şi a treia zi restul de 21 ha. Se cere: *a)* suprafaţa terenului; *b)* ştiind că 3/8 din tot locul s-a cultivat cu grîu, iar restul cu porumb şi că 1 ha cu grîu a produs $19\frac{1}{2}$ q, iar de pe locul cultivat cu porumb s-au recoltat $103\,237\frac{1}{2}$ kg porumb, să se afle producţia totală de grîu şi producţia de porumb la ha a gospodăriei.

G.M B., 1959, pag. 561

3.53. Un casier fiind întrebat cît a încasat într-o zi a răspuns: dacă aş mai fi încasat încă un sfert din cît am încasat şi încă 500 lei, atunci ar fi încasat 5 500 lei. Cît a încasat casierul în ziua respectivă?

G.M.F.B., 1961, pag. 376

3.54. O sumă de bani a fost împărţită în două părţi: prima parte este egală cu 1/2 din întreaga sumă minus 153 lei, iar a doua este cît 3/5 din rest şi încă 452 lei. Să se afle suma întreagă.

3.55. Să se arate că fracţia $\frac{4\,859}{623}$ este ireductibilă.

3.56. Să se găsească fracţiile ordinare care ca numere zecimale sînt scrise astfel: $A = 0,33(314)$; $B = 5,7(57)$; $C = 2,(71)$. Verificare.

3.57. Să se calculeze:

$$1\frac{5}{7} - \left(\frac{8}{10} - \frac{1}{7} + \frac{4}{55}\right) + \frac{6}{385}.$$

3.58. Să se efectueze:

$$4\frac{7}{24} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + 12 \cdot \left(\frac{11}{240} + \frac{7}{8} - \frac{1}{16} + \frac{5}{36} - \frac{1}{18} + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{144} - \frac{19}{20} + 3\frac{7}{180} + \frac{6}{40}\right)$$

3.49. Ce sumă a avut cineva dacă după ce a cheltuit 3/5 şi apoi încă 2/3 din rest i-au mai rămas 240 lei.

3.50. Ce sumă a avut cineva dacă, după ce a cheltuit 3/7 din sumă, apoi 2/5 din cît îi mai rămăsese după prima cumpărătură şi încă 12 lei, constată că i-a rămas necheltuită suma de 24 lei.

3.51. O cooperativă agricolă de producţie termină prăşitul porumbului în 4 zile. Ştiind că în prima zi a prăşit 1/5 din toată suprafaţa, a doua zi 3/8 din rest, a treia zi 5/8 din noul rest, iar în a patra zi restul. Să se afle suprafaţa totală şi cît a prăşit în fiecare zi, dacă în a treia zi a prăşit cu 3 ha mai mult decît în a doua zi.

G.M.F.B., 1960, pag. 493

3.52. O cooperativă agricolă de producţie a arat terenul său în trei zile. În prima zi a arat $\frac{2}{5}$ din toată suprafaţa; a doua zi $\frac{5}{12}$ din rest şi a treia zi restul de 21 ha. Se cere: *a)* suprafaţa terenului; *b)* ştiind că 3/8 din tot locul s-a cultivat cu grîu, iar restul cu porumb şi că 1 ha cu grîu a produs $19\frac{1}{2}$ q, iar de pe locul cultivat cu porumb s-au recoltat 103 237 $\frac{1}{2}$ kg porumb, să se afle producţia totală de grîu şi producţia de porumb la ha a gospodăriei.

G.M B., 1959, pag. 561

3.53. Un casier fiind întrebat cît a încasat într-o zi a răspuns: dacă aş mai fi încasat încă un sfert din cît am încasat şi încă 500 lei, atunci ar fi încasat 5 500 lei. Cît a încasat casierul în ziua respectivă?

G.M.F.B., 1961, pag. 376

3.54. O sumă de bani a fost împărţită în două părţi: prima parte este egală cu 1/2 din întreaga sumă minus 153 lei, iar a doua este cît 3/5 din rest şi încă 452 lei. Să se afle suma întreagă.

3.55. Să se arate că fracţia $\frac{4\,859}{623}$ este ireductibilă.

3.56. Să se găsească fracţiile ordinare care ca numere zecimale sînt scrise astfel: $A = 0{,}33(314)$; $B = 5{,}7(57)$; $C = 2{,}(71)$. Verificare.

3.57. Să se calculeze:

$$1\frac{5}{7} - \left(\frac{8}{10} - \frac{1}{7} + \frac{4}{55}\right) + \frac{6}{385}.$$

3.58. Să se efectueze:

$$4\frac{7}{24} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + 12 \cdot \left(\frac{11}{240} + \frac{7}{8} - \frac{1}{16} + \frac{5}{36} - \frac{1}{18} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{144} - \frac{19}{20} + 3\frac{7}{180} + \frac{6}{40}\right)$$

3.59. Să se găsească valoarea expresiei:

$$E = \left\{\left[\frac{17}{24} + \frac{9}{40} - \left(\frac{11}{48} + \frac{31}{80}\right)\right] : 3\frac{4}{5}\right\} \cdot 1\frac{5}{7}.$$

4.60. Să se arate că:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + 1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{15} = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right)^2.$$

3.61. Să se calculeze:

$$48\frac{43}{51}\left(\frac{11}{2279} + \frac{73}{2021}\right).$$

3.62. Să se calculeze:

$$\left(\frac{457}{2491} + \frac{431}{1363}\right) : \frac{1}{6\frac{1}{256}}.$$

3.63. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\left[\frac{\left(6 - 4\frac{1}{2}\right) : 0{,}03}{\left(3\frac{1}{20} - 2{,}65\right) \cdot 4 + \frac{2}{5}} - \frac{\left(0{,}3 - \frac{3}{20}\right) \cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88 + 2\frac{3}{25}\right) \cdot \frac{1}{80}}\right] : 2\frac{1}{10}$$

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, Tg. Mureş, 1966.

3.64. Să se afle numărul:

$$N = \frac{9{,}7(2) \cdot \frac{18}{175} + 9{,}(72) \cdot \frac{27}{107} \cdot 10}{9{,}72 \cdot \frac{24}{243} + 107} \cdot 30\frac{6}{7} + 4$$

Revista matematică a elevilor din Timişoara, nr. 8/1970

3.65. Să se efectueze:

$$\frac{\left(\frac{15}{16} + 4\frac{1}{4} - \frac{7}{9} - 3\frac{1}{4}\right) : \left(\frac{3}{4} + 2\frac{1}{5} - \frac{15}{11} - 1\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + 4\frac{3}{5} - 3\frac{107}{120}\right) - \left(\frac{2}{5} + 1\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{9}{20}\right)}.$$

3.66. Să se efectueze:

$$\frac{\left[\left(12\frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{4}{15}\right) : \frac{1}{15} - 6 : \frac{1}{28}\right] \cdot \frac{4}{11}}{\left(5 \cdot 2\frac{2}{5} - 8\frac{3}{22}\right) : 42\frac{1}{2}}$$

G.M.B., 1960, pag. 252

Scanned with OKEN Scanner

3.67. Să se efectueze:

$$\frac{1-\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{4}+3:1\frac{1}{5}}{\left(\frac{13}{5}-2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot 1\frac{3}{7}}-\frac{1+\frac{4}{2-\frac{2}{5}}}{7-\frac{2}{1-\frac{2}{3}}}.$$

G.M.B., 1959, pag. 744

3.68. Să se arate că:

$$\left(1+\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\right)\left(1-\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\right)-\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\right)\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\right)=\frac{1}{2}.$$

3.69. Să se efectueze:

$$E=0{,}375+3\frac{2}{5}:\frac{34}{35}-0{,}25+\frac{\left(\frac{4}{5}\cdot 1{,}24\right):0{,}8}{\frac{64-2}{100}}-\left(36-\frac{71}{2}\right)3.$$

3.70. Să se efectueze calculele:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+5\frac{5}{6}\right):2\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{3}-0{,}25\cdot 2\frac{1}{6}\left(\frac{17}{4}-0{,}25\right)}.$$

3.71. Să se efectueze calculele:

$$\frac{\left(\frac{15}{2}-\frac{1}{4}+8\frac{1}{6}\right):2\frac{1}{2}}{0{,}25\cdot 2\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{25}{4}-0{,}25\right)-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{3}}.$$

3.72. Să se calculeze:

$$1\frac{9}{20}-\frac{\left(\frac{645}{1000}:\frac{3}{10}-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(4:\frac{625}{100}-1:5+\frac{1}{7}\cdot\frac{196}{10}\right)}{2-1\frac{1}{5}:7}-\frac{13}{15}.$$

Olimpiada micilor matematicieni, cl. a V-a, București, 1959.

3.73. Să se calculeze:

$$\frac{0{,}(81)+0{,}(63)}{\frac{43}{209}-\frac{1}{19}}-\frac{\left(7\frac{1}{2}+10\frac{5}{7}-16\frac{2}{3}\right):32\frac{1}{2}}{71-70\frac{20}{21}}+32{,}7:4{,}36.$$

G.M.B., 1964, pag. 459

Scanned with OKEN Scanner

3.74. Să se efectueze:

$$1{,}125 - \left[0{,}02(27) + 0{,}170(45) \cdot \frac{0{,}8(3) : 0{,}625 - 0{,}3(6) : \frac{11}{35}}{0{,}2(7)} + \frac{20^{10}}{21^5}\,\frac{14^4}{45^8}\,\frac{189^7}{280^6} : \frac{2^8}{5^4}\right].$$

3.75. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{5 + \dfrac{1}{4 - \dfrac{2}{3}}}{1 + \dfrac{5}{2 + \dfrac{4}{3}}} = \frac{3\frac{1}{20} - 1\frac{12}{16} + 51\frac{42}{60}}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 30}.$$

3.76. Să se calculeze:

$$E = \frac{4 - \dfrac{\frac{3}{4}}{5} + \dfrac{\frac{1}{2}}{6} : \frac{7}{8} + 1}{3 + \dfrac{2}{1 - \frac{1}{5}} - \dfrac{3 - \frac{8}{5}}{1 + \frac{8}{1{,}2}}}$$

3.77. Să se calculeze:

$$E = \frac{4 - \dfrac{\frac{1}{2}}{5} + \dfrac{\frac{3}{4}}{8} : \frac{5}{16} + 1}{1 : \left(3 - \dfrac{1}{3 - 1\frac{3}{5}} - \dfrac{1 + \frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}}\right)}.$$

G.M.B., 1959, pag. 493

3.78. Să se calculeze:

$$1 + \frac{1 + \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2}}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1{,}5}}} \cdot \left[5 - \frac{7}{8}(1 + 0{,}405 : 0{,}945) + 1{,}25 - 0{,}1).(5 - 0{,}32 : 0{,}35) : \frac{1}{9}\right]$$

G.M.B., 1965, pag. 134

Scanned with OKEN Scanner

3.79. Să se calculeze expresia:

$$E = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{x}}}, \text{ unde } x = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1}{4}}{3}}{\cfrac{5}{2}}.$$

3.80. Prin calcule aritmetice să se afle numărul care trebuie pus în locul lui x pentru a avea:

$$\left\{\left[\left(\frac{3x-4}{5} - 15\frac{1}{3}\right)\cdot 3 - 2 + \frac{3}{4}\right] - \frac{2}{5} + 1\frac{1}{8}\right\} : \frac{1}{48} = 144.$$

3.81. Să se transforme: *a)* fracţia 0,002431 din baza 7 în fracţie ordinară cu baza 10, *b)* de asemenea, fracţia 0,0112 din baza 6 în baza 10.

G.M.B., 1959, pag. 51

Capitolul IV

4.1. O statuetă de aur masiv cîntăreşte 18,9 kg. Ştiind că densitatea aurului este de 19,2 să se afle volumul statuetei exprimat în mm^3, cm^3, dm^3.

4.2. O sticlă goală cîntăreşte 600 g, iar plină cu ulei de densitate 0,93 cîntăreşte 1,3 kg. Care este volumul sticlei?

4.3. O piesă de cupru cîntăreşte 1,5 kg în aer şi 1,29 kg în apă. Densitatea apei fiind considerată egală cu unitatea, iar cea a cuprului 8,8 se întreabă dacă în interiorul piesei sînt cavităţi şi care este volumul lor.

4.4. Ce este mai mult 15% din 36 sau 36% din 15.

4.5. Un dm^3 de lapte cîntăreşte 1 030 g şi conţine 13% smîntînă. Din cîţi dm^3 de lapte se poate scoate un kilogram de smîntînă?

4.6. Un zidar şi ajutorul său au efectuat împreună o lucrare pentru care li s-a plătit suma de 1 792 lei. Zidarul a lucrat 25 de zile, iar ajutorul 19 zile. Ştiind că zidarul primeşte pe zi cu 48% mai mult decît ajutorul, să se afle suma primită de fiecare.

4.7. Dacă în anul 1955 s-ar fi extras cu 1 023,6 t cărbune mai mult, iar în 1957 cu 11 387,50 t mai mult, atunci producţia de cărbune ar fi crescut respectiv cu 116% şi 150% faţă de producţia anului 1938. Să se afle care a fost producţia de

Scanned with OKEN Scanner

cărbune în cei trei ani, dacă în total s-au extras în cei trei ani 15 985 494 t de cărbune.

G.M.B., 1958, pag. 734

4.8. Un strungar depăşeşte norma în prima lună cu 6%, în a doua lună cu 10%, iar în a treia lună cu 1/6 din normă. Să se afle care este norma lunară ştiind că în trimestrul respectiv a produs peste plan 98 de piese.

4.9. Trei muncitori execută o lucrare astfel: primul 40% din lucrare, al doilea 1/3 din rest plus 5% din toată lucrarea, iar al treilea restul. Să se afle cîte procente din lucrare a executat al treilea muncitor. Cît se cuvine fiecărui muncitor dacă costul întregii lucrări este 400 lei.

G.M.B., 1962, pag. 429

4.10. O fermă agricolă a împărţit, pentru diferite culturi, 351 hectare de pămînt în trei tarlale. După ce s-a despărţit din prima tarla 1/3 din aria sa, din a doua 1/5 şi din a treia 30%, toate întinderile de pămînt rămase au devenit egale. Cît de mari erau cele trei tarlale?

4.11. Ce cantitate de sămînţă de sfeclă de zahăr cu puritatea de 99% şi puterea de germinaţie 98% este necesară pentru însămînţarea unui hectar, ştiind că norma teoretică este de 29,106 kg/ha. (Prin norma teoretică se înţelege cantitatea de sămînţă cu puritatea de 100% şi puterea de germinaţie de 100%.)

G.M.B., 1960, pag. 493

4.12. Ce cantitate de sămînţă de mazăre se va însămînţa la hectar ştiind că are puritatea de 99%, puterea de germinaţie de 98%, iar norma teoretică este 194,040 kg/ha?

G.M.B., 1962, pag. 504

4.13. S-au făcut două reduceri de preţuri la încălţămintea pentru copii. Prima reducere a fost de 5%, iar a doua făcută mai tîrziu, de 15%. O pereche de ghetuţe costă acum, după ultima reducere, 64,60 lei. Cît a costat înainte de cele două reduceri?

4.14. Să se afle care a fost preţul unui costum de haine înainte de cele două reduceri de preţuri, dacă prima reducere a fost de 8%, iar a doua de 15% şi azi preţul a devenit 469,20 lei.

G.M.B., 1959, pag. 51

4.15. La prima reducere de preţuri s-a făcut unui costum o reducere de 20%, iar la a doua o reducere de 30% şi astfel preţul costumului a devenit 420 lei. Să se afle costul costumului, înainte de reduceri.

4.16. După două reduceri de preţuri, un palton costă 612 lei. Prima reducere a fost de 15% şi a doua de 10%. Care a fost preţul paltonului înainte de reduceri?

4.17. Dintr-un liceu au participat la etapa judeţeană a olimpiadei de matematică 36 de elevi, adică 40% din cîţi au participat la etapa pe oraş, iar la etapa pe oraş au participat 30% din numărul total al elevilor liceului. Cîţi elevi au participat la etapa pe oraş şi cîţi elevi are liceul?

Scanned with OKEN Scanner

4.18. Un muncitor evidenţiat primeşte o primă care reprezintă 28% din salariul său lunar. Această primă împreună cu salariul se ridică la 1 792 lei. Ce salariu are acest muncitor?

4.19. Colectivul unei fabrici de confecţii a obţinut, în primul semestru al unui an, rezultate remarcabile în reducerea preţului de cost, realizînd economii în valoare de 685 000 lei şi depăşind astfel cu 242,50% angajamentul luat. Care fusese angajamentul fabricii privind reducerea preţului de cost?

4.20. O piesă turnată dintr-un aliaj compus din 3 metale luate în proporţie 3 : 4 : 5 costă 283,50 lei, din care 5% s-a plătit pentru manoperă. Să se afle masa piesei, ştiind că 3 g din primul metal costă cît 2 g din al treilea şi 1 g din al treilea costă cît 2 g din al doilea al cărui preţ este 1,50 lei gramul.

G.M.B., 1959, pag. 622

4.21. Ce parte din hectar reprezintă un acru, dacă un acru este egal cu 4 046,848 m^2? Să se exprime în acri aria unui teren dreptunghiular cu lungimea de 19 hm şi lăţimea de 13 hm.

4.22. Pentru prepararea mortarului se ia varul şi nisipul în proporţie de 1 : 2. Mai are loc o contracţie a volumului de mortar faţă de suma volumelor de nisip şi var, în mărime de 25%. Să se afle cît var şi cît nisip este necesar pentru 0,45 m^3 mortar.

G.M.B., 1961, pag. 756

4.23. Pentru a se construi un zid de piatră al cărui volum este de 60 m^3 se foloseşte mortar cu o compoziţie de 280 kg ciment la 1 m^3. Ştiind că mortarul intră în zidăria de piatră în proporţie de 32% şi că în timpul efectuării lucrării se mai pierde 3%, să se calculeze cantitatea de ciment necesară construirii zidului.

4.24. La executarea unei manivele de oţel prin turnare în forme de pămînt şi aşchiere se produceau 50% pierderi prin deşeu, iar la executarea unei pîrghii 40%. Înlocuindu-se turnarea în forme de pămînt prin turnarea de precizie, pierderile de metal s-au redus la 20%, respectiv 15%. La construcţia unei maşini se foloseşte 1 manivelă şi 6 pîrghii de acest fel. Ştiind că masa manivelei este de 1,2 kg, iar a pîrghiei 0,85 kg, să se calculeze pentru cîte maşini se vor putea turna pîrghii şi manivele din materialul economisit la 1 000 de maşini.

G.M.B., 1964, pag. 179

4.25. Pentru îmbunătăţirea organizării procesului de producţie, numărul muncitorilor care compuneau o echipă de montaj a unor motoare electrice s-a redus de la 5 la 4, producţia lunară a echipei rămînînd neschimbată. Să se afle cu cît la sută a crescut productivitatea muncii.

4.26. Norma de timp pentru prelucrarea unei piese se reduce, datorită unei inovaţii, de la 15 minute la 10 minute. Cu ce procent a crescut numărul de piese realizate în unitatea de timp, adică productivitatea muncii?

Scanned with OKEN Scanner

4.27. Dacă la o cantitate de produse fabricate deşeurile au fost 16% din materia pusă în lucru, să se calculeze cîte procente reprezintă deşeurile faţă de produsele fabricate.

4.28. Ca rezultat al aplicării în producţie a unei inovaţii, procentul de rebuturi la o întreprindere industrială a fost redus cu 10% faţă de anul trecut. Ştiind că anul trecut procentul de rebuturi reprezenta 4%, să se afle cu cît la sută a crescut producţia datorită aplicării inovaţiei.

G.M.B., 1963, pag. 741

4.29. La analiza unei bucăţi de cărbune de 13 g s-a constatat că acesta conţine 9,4 g carbon, 1 g hidrogen, 0,7 g oxigen şi 0,6 g azot, restul fiind cenuşă. Să se afle cît la sută din substanţele indicate a conţinut bucata de cărbune?

4.30. Cu 375 kg făină s-au făcut 650 pîini de 750 g fiecare. Ce procent de apă a absorbit făina?

4.31. Producţia de sfeclă de zahăr a crescut de la 1 960 000 t în 1934—1938, la 14 456 000 t în anii 1960—1964. Să se afle cu cît la sută a crescut producţia de sfeclă de zahăr în anii 1960—1964 faţă de anii 1934—1938.

4.32. Din cele 64 t de grîu, recoltate de pe o tarla a unei cooperative agricole de producţie, 5 360 kg au fost oprite pentru însămînţat, 186,4 q au fost vîndute statului, iar restul s-a împărţit cooperatorilor. Să se exprime procentual cantitatea de grîu care s-a împărţit cooperatorilor, precum şi valoarea grîului vîndut statului, ştiind că acesta a fost socotit la preţul de 1,05 lei kilogramul.

4.33. Colectivul de muncitori, tehnicieni şi ingineri al unei uzine, a introdus în procesul de producţie o linie tehnologică de forjare şi tratament termic a osiilor de cale ferată. Ca urmare, în loc de 8 osii pe schimb se realizează 25 de osii, iar consumul de metal a scăzut de la 714 kg la 595 kg pe bucată. Să se exprime procentual creşterea productivităţii muncii şi reducerea consumului de metal.

4.34. Într-un rezervor se afla 2 400 dm^3 de apă sărată în proporţie de 8%. Dacă se adaugă 900 dm^3 de apă dulce, să se afle noua concentraţie a amestecului.

4.35. Apa care se transformă în gheaţă îşi măreşte volumul cu a 11-a parte din volumul său. Cu cît îşi micşorează volumul, la sută, gheaţa cînd, prin topire, se transformă în apă.

4.36. O uzină a fost planificată să producă 3 000 de transformatoare electrice în decurs de un an. Ştiind că planul a fost îndeplinit cu două luni înainte de termen, să se afle cu cît la sută a fost depăşit planul.

4.37. Un strungar a îndeplinit planul pe anul 1958 în 8 luni, lucrînd apoi în contul anului 1959. Se cere:

a) Cu cît la sută a depăşit planul pe 1958?

b) Dacă la începutul anului 1959 norma s-a mărit cu 25%, în cît timp se va realiza planul pe anul 1959, strungarul mărindu-şi randamentul cu 20%.

G.M.B., 1959, pag. 435

Scanned with OKEN Scanner

4.38. Cărbunele de pămînt conține 79% carbon, turba 54% carbon iar antracitul 95% carbon. Dintr-un amestec de 266 kg de turbă și cărbune de pămînt s-a obținut carbon cît în 200 kg antracit. Cîte procente din amestec este turbă?

4.39. Lacul de acumulare al unei hidrocentrale permite irigarea unei suprafețe de 320 000 ha.

a) Să se calculeze cantitatea de cereale pe care o produce această suprafață irigată, știind că pe o suprafață irigată de 250 000 ha se obțin 48 000 vagoane cereale.

b) Să se afle sporul de producție obținut la ha în urma irigării celor 320 000 ha, dacă înainte de irigare de pe 1 200 ha din acest teren se obțineau 150 vagoane cereale.

Concursul de matematică, clasa VI, Ploiești 1966

4.40. Două cărți costau împreună 30 lei. Știind că la una s-a redus prețul cu 10% și la cealaltă cu 15% și că după reducere au costat împreună 26,40 lei, se întreabă cît costă acum fiecare carte?

4.41. Pentru a hrăni 12 cai și 20 vaci se planificase 250 kg fîn pe zi. Mărindu-se rația de fîn pentru cai cu 25% și pentru vaci cu 20%, s-au dat cîte 306 kg fîn pe zi. Cîte kg de fîn se planificase la început pentru un cal și cîte pentru o vacă. Să se mai calculeze cu cîte procente se planificase mai puțin la început față de rația ultimă de fiecare cal și cîte de fiecare vacă?

4.42. Ligheanul-pîlnie de la un separator centrifugal pentru smîntînă este format dintr-un aliaj de zinc și cositor cu masa de 67,2 kg.

a) Ce cantitate de zinc și de cositor conține ligheanul dacă raportul dintre cantitatea de zinc și cea de cositor este 101/11.

b) Ce raport procentual reprezintă cantitatea metalelor din aliaj.

4.43. Un robinet umple un bazin în 3 ore, iar alt robinet umple același bazin în 7 ore. Se știe că un al treilea robinet dă în același timp atîta apă cît celelalte două împreună. Ce procent din volumul bazinului se umple cu apă dacă cele trei robinete curg împreună timp de 50 minute?

Capitolul V

5.1. Să se afle anul ce urmează să fie pătrat perfect și care a fost ultimul an cub perfect.

5.2. Să se găsească pătratul perfect de forma $\overline{abcde}$, unde $\overline{ab}$, $a + b$, $c - b$ și b sînt pătrate perfecte.

5.3. *a)* Să se calculeze perimetrul celui mai mare pătrat a cărui arie este mai mică decît 1 966 m², iar latura este exprimată printr-un număr întreg de metri.

b) Care va fi latura celui mai mic pătrat a cărui arie este mai mare decît 1 967 m², iar latura este exprimată printr-un număr întreg de metri.

Scanned with OKEN Scanner

5.4. Cerînd unei persoane data naşterii răspunde: „m-am născut într-un an pătrat perfect în prima lună a anului şi în acea zi a lunii al cărui număr de ordine este egal cu numărul de ani pe care i-am împlinit în 1963". Să se afle data naşterii acestei persoane.

G.M.B., 1963, pag. 630

5.5. Un paralelipiped drept are baza un pătrat, iar aria laterală se desfăşoară într-un pătrat cu aria de 1 024 dm². Care este volumul paralelipipedului?

5.6. Dacă mărim un număr de 5 ori şi pe altul de 3 ori, produsul numerelor devine 14 580. Să se afle cele două numere, ştiind că suma lor este de 4 ori mai mare decît cel mai mic dintre cele două numere. Verificare.

5.7. Dintr-un pătrat se scot două fîşii dreptunghiulare de lăţimi egale cu 15% din latura pătratului, figura rămînînd tot un pătrat. Se mai ştie că fîşia cea mai lungă are cu 81 m² mai mult decît cealaltă fîşie. Care sînt laturile celor două pătrate?

5.8. Un loc de formă dreptunghiulară are lăţimea cît 3/5 din lungime. Să se calculeze care sînt dimensiunile acestui loc dacă 12% din aria lui reprezintă 617,728608 m².

G.M.B., 1959, pag. 49

5.9. Folosind descompunerea în factori să se arate că numărul

$$N = 10 \cdot 13 \cdot 62 \cdot 65 \cdot 128 \cdot 248$$

este un pătrat perfect. Să se găsească apoi rădăcina pătrată fără întrebuinţarea regulii practice de extragerea rădăcinii.

5.10. Să se calculeze:

$$1\frac{2}{13}\left\{1\frac{9}{10}\left[\left(0{,}645 : 0{,}3 - 1\frac{107}{180}\right)\left(4 : 6{,}25 - 1 : 5 + \frac{1}{7}\sqrt{38416}\right)\right] : \left(1 - 2\frac{1}{5} : 7\right)\right\}.$$

5.11. Să se calculeze expresia:

$$\left(\frac{2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{5}}{1\frac{1}{7} - \frac{3}{5}} + \frac{1}{2}\right) : \frac{\left[1\frac{1}{2} + \sqrt{1{,}(7)}\right] \cdot \left[2{,}(3) - \frac{1}{2}\right]}{2{,}(3) + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1{,}(7) - 1}{1{,}(7) + 1}} + \frac{18}{25}}{3 - (10^2 - 9^2) \cdot 0{,}(142857)}.$$

G.M.B., 1971, pag. 172

5.12. Să se calculeze numărul:

$$N = \sqrt{\frac{\sqrt{58\,564}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^7 - 6^2}} \cdot \frac{\sqrt{162 - \sqrt{324}}}{\sqrt{234\,256}} + \sqrt{2^4 \cdot 5^2 - 2^8} + 3}.$$

Revista matematică a elevilor din Timişoara, nr. 2/1971.

5.13. Să se efectueze

$$\frac{\left[12\frac{7}{8} - \frac{2}{9} \cdot \sqrt{1{,}72\,265\,625} - \left(1\frac{7}{20} + 3\frac{4}{15}\right)\right] : 4\frac{4}{5}}{\left[1\frac{5}{29} + 3\frac{5}{9} : \left(17\frac{19}{30} + 1\frac{7}{10}\right)\right] \cdot \frac{58}{59}} : \left(5 - \frac{1}{48}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

5.14. Să se efectueze:

$$\frac{10-8\cdot\left\{0,46(1)+\frac{1}{24}-\left[6\frac{1}{3}-(6+0,0675:1,215)\right]\right\}}{3,9986+\frac{1}{10}\cdot\sqrt{0,000196}}.$$

G.M.B., 1965, pag. 134

5.15. Să se efectueze:

$$\frac{2,8+5\frac{1}{2}:\left(3+0,2\cdot 2\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7}\cdot 4\frac{1}{5}:8+2,45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-\sqrt{1,5625}}:2,8.$$

Revista matematică a elevilor din Timişoara, nr. 2/1971.

5.16. Să se efectueze:

$$2,6275-\frac{\left(10,42+10\frac{17}{25}\right)\cdot\frac{1}{50}}{\left(\sqrt{89,8704}-0,48\right):11\frac{1}{4}}+\frac{\left(20\frac{4}{5}-4,8\right)\cdot\frac{1}{16}:0,8}{\left(\sqrt{7,84}-\frac{11}{20}\right):0,9}.$$

5.17. Să se calculeze:

$$\left\{\frac{\left[6-\left(4+\frac{1}{2}\right)\right]:0,003}{\left[\left(3+\frac{1}{20}-2,65\right)\cdot 4\right]:\frac{1}{5}}-\frac{\left(0,3-\frac{3}{20}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1,88+2+\frac{3}{25}\right)\cdot 0,125}\right\}:$$

$$:\left(62+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{1,(3)+0,(5)+1,(6)}{\sqrt{13-\frac{29}{81}}}.$$

5.18. Să se efectueze:

$$\sqrt{\sqrt{16\frac{81}{100}}:0,9+\frac{2}{7}+\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}:1\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{1\frac{264}{275}}}}.$$

5.19. Să se efectueze:

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2419}+\frac{16}{2173}+\frac{17}{1927}\right)\cdot 209\frac{460}{701}}.$$

5.20. Se dă:

$$A=5\frac{1}{5}-\left[17\frac{2}{3}+\left(8\frac{1}{7}-3\frac{25}{28}\right)-14\frac{7}{15}-\left(7\frac{1}{16}-3\frac{7}{12}+\frac{1}{48}\right)\right]$$

şi

$$B=4\frac{1}{6}-\left[17\frac{1}{24}+\left(8\frac{1}{18}-3\frac{3}{4}\right)-14\frac{5}{8}-\left(7\frac{5}{27}-3\frac{7}{18}-\frac{1}{54}\right)\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

5.14. Să se efectueze:

$$\frac{10-8\cdot\left\{0,46(1)+\frac{1}{24}-\left[6\frac{1}{3}-(6+0,0675:1,215)\right]\right\}}{3,9986+\frac{1}{10}\cdot\sqrt{0,000196}}.$$

G.M.B., 1965, pag. 134

5.15. Să se efectueze:

$$\frac{2,8+5\frac{1}{2}:\left(3+0,2\cdot 2\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7}\cdot 4\frac{1}{5}:8+2,45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-\sqrt{1,5625}}:2,8.$$

Revista matematică a elevilor din Timișoara, nr. 2/1971.

5.16. Să se efectueze:

$$2,6275-\frac{\left(10,42+10\frac{17}{25}\right)\cdot\frac{1}{50}}{\left(\sqrt{89,8704}-0,48\right):11\frac{1}{4}}+\frac{\left(20\frac{4}{5}-4,8\right)\cdot\frac{1}{16}:0,8}{\left(\sqrt{7,84}-\frac{11}{20}\right):0,9}.$$

5.17. Să se calculeze:

$$\left\{\frac{\left[6-\left(4+\frac{1}{2}\right)\right]:0,003}{\left[\left(3+\frac{1}{20}-2,65\right)\cdot 4\right]:\frac{1}{5}}-\frac{\left(0,3-\frac{3}{20}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1,88+2+\frac{3}{25}\right)\cdot 0,125}\right\}:$$

$$:\left(62+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{1,(3)+0,(5)+1,(6)}{\sqrt{13-\frac{29}{81}}}.$$

5.18. Să se efectueze:

$$\sqrt{\sqrt{16\frac{81}{100}}:0,9+\frac{2}{7}+\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}:1\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{1\frac{264}{275}}}}.$$

5.19. Să se efectueze:

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2419}+\frac{16}{2173}+\frac{17}{1927}\right)\cdot 209\frac{460}{701}}.$$

5.20. Se dă:

$$A=5\frac{1}{5}-\left[17\frac{2}{3}+\left(8\frac{1}{7}-3\frac{25}{28}\right)-14\frac{7}{15}-\left(7\frac{1}{16}-3\frac{7}{12}+\frac{1}{48}\right)\right]$$

și

$$B=4\frac{1}{6}-\left[17\frac{1}{24}+\left(8\frac{1}{18}-3\frac{3}{4}\right)-14\frac{5}{8}-\left(7\frac{5}{27}-3\frac{7}{18}-\frac{1}{54}\right)\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

și se cere să se calculeze:

$$E = \sqrt{\frac{A+B}{A-B} - 68(A-B)}\ .$$

5.21. Să se calculeze expresia:

$$\frac{\sqrt{0{,}75 + 2{,}(3) + 2{,}1(3) : 0{,}12 - 1\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{7}{18}}}{\sqrt{\frac{2^4\cdot 3^2\cdot 5^3}{2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 1{,}(6)}\cdot\frac{5}{9} : \frac{2}{3}\cdot\frac{2\frac{1}{2}-1}{3\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{1}{16}}}\sqrt{\frac{1}{36}}\ .$$

G.M.B., 1965, pag. 178

5.22. Să se determine al patrulea proporțional din proporțiile:

a) $x : 4\frac{1}{6} = 7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$; *b)* $1{,}9 : x = 1{,}14 : 2{,}52$.

5.23. Să se găsească x din proporțiile:

a) $3{,}05 : 1\frac{21}{40} = \frac{1}{4}x : \frac{1}{8}$; *b)* $0{,}125 : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}x$.

5.24. Să se găsească x din proporțiile:

a) $1{,}(1) : 3\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} : \frac{4}{7}x$; *b)* $0{,}01(36)x : 14\cdot 5(18) = 1 : 1{,}(6)$.

5.25. Să se găsească x din proporția:

$$\frac{0{,}75 + 0.5(6) + 1{,}25}{0{,}(6)x} = \frac{1\frac{7}{12} - 0{,}41(6)}{3{,}(03)}\ .$$

5.26. Să se afle x din proporțiile următoare, după ce mai întîi s-au format proporții derivate:

$$a)\ \frac{x+15}{x} = \frac{8}{6};\ b)\ \frac{x-2.5}{1\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}\ .$$

5.27. Să se afle x din proporțiile următoare, după ce mai întîi s-au format proporții derivate:

$$a)\ \frac{7{,}5-x}{3{,}5+x} = \frac{5}{6};\ b)\ \frac{\frac{1}{3}+x}{\frac{3}{4}+x} = \frac{7}{9}\ .$$

5.28. Pe suprafața globului pămîntesc, raportul dintre uscat și apă este ca 1 : 2,4. Uscatul ocupă 149 milioane km². Ce suprafață ocupă apa?

Scanned with OKEN Scanner

5.29. Raza Lunii este de atîtea ori mai mică decît raza Pămîntului de cîte ori este 5 mai mic ca 18. Raza Pămîntului este de 6 378 km. Să se afle raza Lunii.

5.30. Duratele oscilaţiilor în acelaşi loc, a două pendule diferite, sînt proporţionale cu rădăcinile pătrate ale lungimilor lor. Ştiind că un pendul cu lungimea de 99 cm bate secunda, să se calculeze numărul de oscilaţii pe zi în acelaşi loc a unui pendul cu lungimea de 561 mm.

5.31. Să se găsească un număr de două cifre astfel ca raportul dintre diferenţa şi suma cifrelor sale să fie 4/5.

5.32. O marfă a intrat în depozit la preţul de 1 080 lei. După două reduceri de preţuri, acea marfă s-a vîndut cu 874,80 lei. Ştiind că reducerile au fost proporţionale cu noile preţuri ale mărfii, să se afle preţul mărfii după prima reducere de preţuri.

5.33. Raportul a două numere este $\frac{3}{2}$ iar diferenţa lor este 30. Să se afle cele două numere folosind şi proporţiile derivate.

5.34. Să se calculeze:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}+2{,}473\cdot 0{,}05\right)\cdot 100+0{,}1581:\frac{3}{50}}{5\cdot\left(\sqrt{9\frac{909}{2500}}-\frac{1}{20}\cdot 4+66:0{,}33+\frac{7}{50}-1:\frac{1}{3}\right)}.$$

5.35. Să se efectueze:

$$\left[0{,}78:2{,}6+\frac{77}{90}:\left(6-\frac{2{,}3+5:6{,}25}{8\cdot 0{,}0125+6{,}1}\right)\right]:\sqrt{1\frac{781}{900}}.$$

Concursul de matematici, clasa VI, Ploieşti, 1966

5.36. Să se calculeze rădăcina patrată a fracţiei $\frac{32}{75}$ în următoarele moduri:

a) amplificînd fracţia astfel ca numitorul să devină patrat perfect;

b) transformînd fracţia dată în fracţie zecimală.

Concursul de matematică, cl. VI, Tg. Mureş, 1966

5.37. La o cooperativă lucrează două echipe de muncitori. Contabilul cooperativei a observat că raportul numerelor ce reprezintă numărul de muncitori din cele două echipe este 2/3 iar dacă numărul muncitorilor din fiecare echipă ar fi cu 9 mai mare, atunci raportul numerelor de muncitori din cele două echipe ar deveni 5/6. Se cere:

a) Să se afle numărul de muncitori din ambele echipe.

b) Cîţi muncitori ar mai trebui angajaţi în mod egal la fiecare echipă pentru ca raportul să devină $\frac{7}{10}$ în loc de $\frac{2}{3}$.

Concursul de matematică, clasa VI, Crişana, 1966

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

6.1. Două echipe de muncitori au lucrat la săparea unui canal de irigaţie. Prima echipă are 24 muncitori şi a lucrat 45 zile, a doua are 35 muncitori şi a lucrat 21 zile. Care este raportul între sumele cuvenite primei şi celei de-a doua echipe?

6.2. Ca urmare a înzestrării căilor noastre ferate cu noi locomotive Diesel-electrice de producţie românească, viteza comercială a trenurilor de marfă a sporit cu 50% în comparaţie cu garniturile tractate de locomotive cu abur, iar tonajul lor mediu a crescut cu 35%. Să se afle cu cît a crescut posibilitatea de remorcare a unei locomotive electrice, în unitatea de timp, faţă de o locomotivă cu abur.

6.3. O brigadă formată din 36 ţărani cooperatori a efectuat în 7 zile, lucrînd cîte $8\frac{1}{4}$ ore pe zi, $\frac{3}{5}$ dintr-o lucrare. Cîţi cooperatori ar trebui să se mai adauge brigăzii, pentru ca astfel să se poată termina restul lucrării în 2 zile, lucrîndu-se cîte $10\frac{1}{2}$ ore pe zi?

6.4. O brigadă compusă din 12 lucrători poate termina săpatul unui canal în 25 zile. După ce brigada lucrează 5 zile, 6 lucrători pleacă în altă parte. În cîte zile se va termina săpatul?

G.M.B., 1962, pag. 615

6.5. Pe un şantier 10 muncitori lucrînd cîte 6 ore pe zi au executat în 7 zile 490 m^3 săpătură. Cîţi muncitori sînt necesari, pentru ca în 5 zile şi lucrînd cîte 8 ore pe zi, să execute 980 m^3 săpătură?

6.6. Pentru a construi un bazin au fost angajaţi 54 de muncitori, care lucrînd cîte $6\frac{2}{3}$ ore pe zi, au executat în 11 zile de lucru 0,3(6) din lucrare. Cîţi muncitori mai trebuie angajaţi pentru ca lucrînd împreună cu cei dintîi cîte 6 ore zilnic să poată termina restul lucrării în 15 zile?

6.7. La turnătoria de fontă a unei uzine, în 8 ore, trei muncitori toarnă în cochile 1 000 piese. În cît timp nouă muncitori vor turna 4 500 piese? Cîţi muncitori vor turna, în 12 ore, 3 000 piese? Cîte piese vor turna 12 muncitori în 10 ore?

6.8. La o fabrică de sticlă se comandă 372 tone sticlă. Sticla se prepară din 68 părţi nisip, 36 părţi sodă şi 20 părţi var. Cîte kilograme sînt necesare din fiecare fel de material?

6.9. Trei lucrători au efectuat o lucrare pentru suma de 2 123 lei. Ştiind că primul a lucrat 94 ore, al doilea 140 ore şi al treilea 152 ore, se întreabă cît se cuvine fiecăruia.

6.10. O fermă agricolă de stat a însămînţat 1 300 ha cu grîu, ovăz, orz şi secară. Grîu s-a semănat de 3 ori mai mult decît orz, iar orz s-a semănat de 2 ori mai mult

Scanned with OKEN Scanner

decît ovăz şi ovăz de patru ori mai puţin decît secară. Să se afle ariile însămînţate cu fiecare cultură în parte.

G.M.B., 1959, pag. 41

6.11. Un călător a parcurs un drum de 320 km în trei etape egale ca timp. Prima etapă a parcurs-o pe jos, a doua etapă a parcurs-o cu trenul, iar a treia cu trăsura. Să se afle lungimea drumului parcurs în fiecare etapă, ştiind că viteza trenului a fost de patru ori mai mare decît viteza trăsurii, iar pe jos a călătorit de trei ori mai încet decît cu trăsura.

G.M.B., 1963, pag. 180

6.12. Pentru fabricarea porţelanului se iau 24 părţi argilă albă, 2 părţi nisip, 1 parte gips şi 17 părţi apă. Cît trebuie luat din fiecare pentru a realiza 132 kg amestec din care s-ar face porţelan?

6.13. Pe un şantier, trei echipe de muncitori au efectuat într-o săptămînă: prima 480 ore-muncă, a doua 450 ore-muncă şi a treia 570 ore-muncă. Şeful celor trei echipe a primit 7 500 lei pe care trebuie să-i împartă echipelor după numărul de ore-muncă efectuate. Cît a primit fiecare echipă?

6.14. Numărul 100 se împarte proporţional cu numerele $1\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{3}$. Ce procent revine la fiecare parte?

6.15. Într-o cooperativă agricolă de producţie s-au strîns de pe un cîmp $103\frac{11}{12}$ tone de fîn, de pe un al doilea cîmp 93,350 tone, iar de pe un al treilea $215\frac{5}{6}$ tone. O parte din fîn a fost depus pe o arie pe care ar fi încăput 70% din tot fînul, dar pe arie se mai găseau 15,4 tone de fîn. Restul de fîn a fost adunat în clăi care cuprindeau cantităţi proporţionale cu numerele 2, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{7}$, $1\frac{1}{2}$. Cît fîn se găseşte în fiecare din cele patru clăi?

6.16. Trei muncitori au primit pentru munca executată 426 lei. Se ştie că primul a lucrat de 3/4 ori mai mult decît al treilea, iar al doilea de 2,4 ori mai mult decît primul. Cît a primit fiecare?

6.17. Să se împartă numărul 1 375 în patru părţi astfel ca: partea I să se raporte la partea a II-a, ca 2 : 3; partea a II-a la a III-a ca 4 : 5, iar partea a III-a să se raporte la a IV-a ca 3 : 4.

G.M.B., 1959, pag 435

6.18. Între membrii unei brigăzi de cinci muncitori se împarte o sumă de 5 200 lei după munca efectuată de fiecare muncitor. Primul primeşte 15,5% din suma întreagă, al doilea a 6/13 parte din suma rămasă, raportul sumelor primite de-al treilea şi de-al patrulea muncitor este 0,5 : 0,30(5), iar raportul sumelor primite de-al cincilea şi de-al treilea este 1,2 : $4\frac{1}{2}$. Cîţi lei a primit fiecare în parte?

G.M.B., 1964, pag. 29

Scanned with OKEN Scanner

6.19. Axul unui motor al cărui diametru este de 15 cm este legat prin curele de transmisie de trei roți, avînd respectiv 2 dm, 3 dm și 4 dm drept raze. Să se calculeze numărul de ture pe minut al fiecărei roți dacă axul face 400 ture pe minut. Toate cele 3 curele sînt acționate prin rotirea axului motorului.

6.20. La un cros, desfășurat pe o anumită distanță, s-au acordat primilor trei cîștigători suma de 707 lei ca premiu în obiecte. Știind că primul a făcut 10 minute, al doilea 11 minute și al treilea 14 minute, să se afle cît a primit fiecare alergător, știind că sumele primite sînt invers proporționale cu timpul.

6.21. La un concurs de matematică, trei elevi au obținut un premiu în obiecte de 726 lei. Toți trei au lucrat la fel de bine, însă unul din ei a terminat într-o oră și 4 minute, al doilea într-o oră și 12 minute, iar al treilea într-o oră și 20 minute. Ținînd seama de aceasta, comisia a hotărît ca suma de mai sus să se împartă invers proporțional cu timpul în care au lucrat. Cît a primit fiecare?

6.22. La un concurs s-au acordat premii în valoare de 530 lei. Elevii care rezolvă corect problema vor primi cîte o sumă invers proporțională cu timpul în care au lucrat-o; astfel 3 elevi au fost premiați. Știind că primul a terminat în 30 minute, al doilea în 5/6 din timpul celui dintîi și al treilea în 9/10 din timpul celui de-al doilea, să se calculeze ce sumă a primit fiecare.

6.23. O sumă de bani a fost dată ca premiu la 3 muncitori proporțional cu numerele 2, 3 și 5. În al doilea trimestru, aceeași sumă a fost dată ca primă acelorași lucrători, însă invers proporțional, respectiv cu 2, 3 și 5. S-a constatat că din cele două prime, al treilea lucrător a încasat cu 165 lei mai mult decît al doilea. Să se afle cît a primit fiecare lucrător de fiecare dată.

6.24. Țăranii din trei sate vecine au construit împreună un pod în valoare de 6 540 lei. Primul sat este la o distanță de 1 600 metri de pod și are 152 familii, al doilea sat la o distanță de 2 500 metri de pod și are 110 familii, iar al treilea la o distanță de 3 000 metri și are 128 familii. Cu cît trebuie să contribuie țăranii din fiecare sat, dacă s-au învoit ca sumele date să fie direct proporționale cu numărul de familii și invers proporționale cu distanța pînă la pod.

6.25. Într-un termostat s-a turnat 100 g apă cu temperatura de 72°C, apoi 150 g apă la 90°C și la urmă 250 g apă, cu temperatura 98°C. Să se afle temperatura amestecului.

6.26. Dacă la un amestec de 1,700 kg de apă sărată în proporție de 8% se adaugă 400 g apă dulce care va fi proporția de sare din noul amestec?

6.27. Care este volumul unui corp cu masa de 1,5 kg făcut dintr-un aliaj obținut prin topirea laolaltă a 500 kg cupru, 140 kg cositor, 6,25 kg zinc și 5 kg plumb știind că densitățile acestor metale sînt: pentru cupru 8,8, cositor 7,3, zinc 6,86 și plumb 11,35.

6.28. Dacă introducem o bucată dintr-un aliaj de aluminiu în apă, rămîne nescufundat 10 cm^3 din volumul său. Introducînd aceeași bucată într-un amestec de

Scanned with OKEN Scanner

8 părți petrol de densitate 0,8 cu 2 părți apă, rămîne nescufundat numai 5 cm^3 din volumul său. Care este densitatea, volumul și masa bucății de aliaj?

6.29. Un aliaj de platină are titlul de 0,8 și conține 1 968 g platină pură. Să se afle masa aliajului.

6.30. Se topesc la un loc două aliaje: unul are masa totală 200 g și titlul 0,8; celălalt conține 324 g metal prețios și are titlul 0,9. Să se afle: *a)* cît la sută metal prețios conține noul aliaj obținut, *b)* care este titlul acestui aliaj.

G.M.B., 1958, pag. 415

6.31. Un aliaj de 200 g cu titlul de 0,870 se topește cu alte două aliaje de greutăți egale: unul cu titlul de 0,880 și celălalt cu titlul 0,790. Se obține un nou aliaj cu titlul de 0,850. Care este masa aliajului obținut?

6.32. Se topește un aliaj de argint cu titlul 0,836 cu altul al cărui titlul este 0,900 și se obțin 5 kg de un nou aliaj cu titlul 0,860. Cît s-a topit din fiecare aliaj?

G.M.B., 1958, pag. 348

Capitolul VII

7.1. Suma a două numere întregi este 100. Împărțind numărul mare la cel mic obținem cîtul 4 și restul 10. Să se afle cele două numere.

7.2. Să se găsească două numere a căror diferență să fie 290, iar dacă împărțim primul număr la al doilea să obținem cîtul 4 și restul 8.

7.3. Să se scrie în sistemul de numerație cu baza 8, numărul 1 967 scris în baza 10 și apoi același număr să se scrie în baza 12.

7.4. Cîte triunghiuri se pot construi astfel ca lungimile laturilor să fie numere întregi al căror produs să fie 60?

G.M.B., 1963, pag. 285

7.5. Să se afle ce cifre reprezintă x și y din numărul de 5 cifre $\overline{289\,xy}$, știind că acest număr se divide cu 140.

7.6. Să se afle două numere întregi, astfel ca suma lor să fie 13, iar produsul lor plus cîtul lor să fie $\frac{259}{6}$.

7.7 Să se afle două numere, știind că raportul lor este 6/11, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 1 386.

G.M.B., 1962, pag. 612

Scanned with OKEN Scanner

7.8. O echipă de 42 muncitori lucrînd cîte 8 ore pe zi termină în 33 de zile, 11/33 dintr-o lucrare.

a) Să se afle cîţi muncitori mai trebuie să fie angajaţi ca lucrînd împreună cu echipa iniţială să termine lucrul cerut în 18 zile, însă să se lucreze numai 7 ore pe zi cu aceeaşi productivitate.

7.9. Un camion transportă marfă pentru o cooperativă cu o viteză medie de 50 km pe oră.

Pentru a transporta 2,8 t marfă de la o distanţă pe care o parcurge în $1\frac{1}{4}$ ore cooperativa plăteşte 385 lei.

De la ce distanţă s-au transportat 3,2 t de marfă dacă s-a plătit 418,80 lei?

Concursul de matematică, cl. VI, Tg-Mureş, 1966

7.10. O echipă de 35 muncitori a fost planificată să execute o lucrare în 50 de zile. Însă timp de 15 zile au lucrat numai 30 muncitori, apoi timp de 25 zile numai 10 muncitori. Norma de lucru fiind aceeaşi pentru toţi să se afle cîţi muncitori vor lucra în continuare pentru a termina lucrarea la timpul fixat.

G.M.B., 1966

7.11. Se dau fracţiile $\frac{31}{36}; \frac{37}{42}; \frac{43}{48}$. Se cere: 1) Să se aşeze în ordinea lor de mărime, fără a le transforma în fracţii zecimale şi fără a le aduce la acelaşi numitor. 2) Să se intercaleze între fracţiile date media lor aritmetică.

7.12. Întreitul unui număr a fost micşorat cu patru şi apoi s-a înmulţit rezultatul obţinut cu cinci. La produsul obţinut s-a adăugat 8 şi apoi s-a împărţit prin 7 şi s-a obţinut cîtul 39. Să se afle numărul cu care s-a început calculul.

7.13. Prin calcule aritmetice, să se afle ce număr trebuie pus în locul lui x pentru a avea egalitatea:

$$\left[\left(12\frac{1}{2}-2\right):\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{40}\right)-\left(2+6\frac{2}{3}\right):\left(1\frac{5}{6}-1\frac{2}{3}\right)\right]:x=\frac{1}{8}.$$

7.14. Să se calculeze x ştiind că:

$$\left[x-\left(18\frac{7}{8}-5\frac{1}{4}\right)\left(10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}\right)\right]:22\frac{7}{18}=\frac{1}{8}.$$

7.15. Să se găsească toate perechile de două numere întregi al căror produs este 576.

7.16. Să se afle x din proporţia următoare, folosind proporţii derivate:

$$\frac{x+\sqrt{\frac{146,41}{121}}}{x-0,5(6)}=\frac{3}{2}.$$

Concursul de matematică pentru cl. a VI-a, Reşiţa, 1969.

Scanned with OKEN Scanner

7.17. Pentru iluminatul unui atelier s-a folosit un număr de becuri egal cu media proporțională a numerelor 8 și 50, care au ars timp de 12 zile cîte $5\frac{1}{2}$ ore pe zi, cheltuindu-se o sumă de lei egală cu termenul necunoscut al proporției:

$$\frac{11}{x} = \frac{10{,}1}{\sqrt{10\,201}}.$$

a) Ce sumă trebuie să cheltuiască pentru iluminatul aceluiași atelier, dacă numărul becurilor se mărește cu 4, arzînd cu 2 zile mai puțin, cîte 6 ore pe zi.

b) Dar după ce costul iluminatului se reduce cu $\frac{1}{4}$ din vechiul cost?

Revista matematică a elevilor din Timișoara, nr. 2/1971

7.18. O sîrmă de aluminiu este tăiată în patru părți. Prima parte reprezintă $\frac{2}{3}$ din a doua și este mai lungă decît a treia cu 4 cm. Partea a doua este de 1,3 ori mai lungă decît a treia cu 4 cm. Partea a doua este de 1,3 ori mai lungă decît a patra, care măsoară $1\frac{1}{5}$ m. Să se determine lungimea fiecărei părți.

7.19. Într-o cooperativă agricolă de producție semănăturile formează patru parcele: grîu, ovăz, orz și porumb. Parcela cu grîu este de două ori mai mare decît celelalte trei parcele la un loc. Parcela cu orz este cu 30 ha mai mare decît parcela cu ovăz, iar parcela cu porumb este cu 10 ha mai mare decît a treia. Cîte hectare are fiecare parcelă, dacă toate fac împreună 921 hectare.

7.20. O fermă agricolă de stat a cultivat cu porumb 100 ha de pămînt. Toate lucrările au fost făcute cu mijloace mecanizate în 343 zile. Nemecanizat s-ar fi folosit 5 370 zile. La fiecare hectar lucrat mecanizat s-au recoltat 200 kg boabe în plus. Ziua a fost plătită cu 32 lei, 1 kg de porumb a fost socotit la 90 bani. Ce economie a făcut această fermă folosind mijloace mecanizate?

G.M.B., 1961, pag. 45

7.21. Un număr de 12 muncitori au construit în 4 zile un zid lung de 60 m, înalt de 3,5 m și gros de 0,4 m. În cît timp muncitorii vor împrejmui un zid de aceeași înălțime, gros de 0,5 m, un teren în formă de dreptunghi lung de 40 m și lat de 25 m.

Concursul de matematică, cl. VI, Bacău, 1966

7.22. Un excavator scoate pe oră 60 m^3 pămînt, pe care îl încarcă în camioane autobasculante cu capacitatea de 3 m^3. Pămîntul scos se transportă la 10 km distanță. Viteza camioanelor atît la dus cît și la întors este 30 km/oră. Timpul de descărcare este de 2 minute. Să se afle numărul minim de camioane care trebuie să deservească excavatorul ca acesta să lucreze fără întrerupere.

G.M.B., 1964, pag. 179

7.23. În 24 zile, 24 de muncitori repară 2/3 dintr-un drum. *a)* În cîte zile vor termina de reparat drumul?

Scanned with OKEN Scanner

b) În cîte zile vor termina de reparat 3/4 din drum?

c) Să se arate că numărul de zile în care de șase ori mai mulți muncitori ar repara tot drumul, este media geometrică între rezultatele obținute la punctele *a)* și *b)*.

Concursul de matematică, cl. VI, Banat, 1966

7.24. Un teren al unei cooperative agricole de producție de $118\frac{1}{3}$ ha, a fost semănat cu: grîu, secară, orz și ovăz. Cu grîu s-au cultivat cu $\frac{179}{3}$ ha mai mult decît cu ovăz. Suprafața cultivată cu orz e cu 18 ha mai mică decît cea cu secară, iar suprafața cu secară e de 3 ori mai mare decît suprafața cu orz. Să se afle:

a) Cîte hectare ocupă fiecare cultură?

b) Ce parte din teren s-a cultivat cu grîu și cîte kg de grîu se vor obține dacă 1 ha produce 24 q.

G.M.B., 1959, pag. 435

7.25. Un om pe jos, un călăreț și un automobil efectuează timp de o oră 78 km. Dintr-un punct A pleacă întîi omul și la 1/4 ore pleacă tot din A călărețul, iar la 2 ore după călăreț pleacă automobilul care după 1/4 oră ajunge omul, iar după 1/2 oră ajunge călărețul. Cîți kilometri parcurge fiecare într-o oră?

7.26. Un automobil pleacă din localitatea A mergînd cu viteza constantă de 30 km/h. Ajungînd în localitatea B se reîntoarce fără oprire însă cu o viteză de 20 km/h și ajunge în A după 5 ore de la plecare. Să se afle distanța dintre cele două localități.

G.M.B., 1961, pag. 186

7.27. Un biciclist și un motociclist pleacă din A spre B, primul pornește la ora 8 și 30 minute și merge cu viteza de 8 m/s, iar al doilea pornește la ora 8 și 45 minute și merge cu viteza de 25 m/s. Dacă distanța de la A la B este de 20 km, să se afle:

a) la ce distanță de A motociclistul ajunge pe biciclist și la ce distanță de B este biciclistul în momentul sosirii în B a motociclistului?

b) la ce oră ar fi trebuit să plece motociclistul pentru ca el să fi putut sosi în B o dată cu biciclistul?

G.M.B., 1960, pag. 435

7.28. Un automobil merge cu viteza constantă de 36 km/oră, timp de $2\frac{1}{2}$ ore. La înapoiere, după ce merge cu aceeași viteză 66 km, se oprește și stă 1/3 oră. Cu ce viteză trebuie să-și continue drumul pentru a ajunge în același timp? Dacă plecarea a avut loc la ora 11 și 40 minute, la ce oră va avea loc oprirea?

7.29. Un grup de pionieri bicicliști a plecat în excursie în orașul vecin situat la 40 km. O dată cu ei a plecat și un motociclist cu aceeași destinație. Bicicliștii fac 12 km/oră, iar motociclistul 36 km/oră. Știind că motociclistul stă o oră în oraș și apoi se întoarce spre casă, să se afle după cît timp de la plecare întîlnește pe pionieri și la ce distanță de locul de plecare?

Scanned with OKEN Scanner

7.30. La construirea unui dig trebuie deplasat sub apă un bloc de piatră cu dimensiunile de 2 m, 2 m şi 1,5 m şi cu densitatea de 2,4. Lanţul cu ajutorul căruia trebuie ridicat blocul este în stare să susţină masă maximă de 10 t. Va rezista oare lanţul la deplasarea blocului de piatră sub apă?

7.31. O fabrică vinde 45 360 bucăţi săpun de două calităţi: cu 6 lei bucata şi cu 4 lei bucata şi încasează în total 211 680 lei. Cîte bucăţi au fost de fiecare calitate?

G.M.B., 1960, pag. 252

7.32. La o croitorie s-au adus 50 m de nailon şi grenadin plătindu-se 2 740 lei. Să se găsească numărul metrilor de nailon şi de grenadin ştiind că 1 m de grenadin costă 18 lei, iar un metru de nailon costă cu 46 lei mai mult decît un metru grenadin.

G.M.B., 1961, pag. 625

7.33. Muncitorii dintr-o fermă au fost repartizaţi în felul următor: la cules de sfeclă de zahăr au plecat jumătate şi încă trei tovarăşi; la cules de porumb au plecat jumătate din rest şi încă 10 tovarăşi; la semănăturile de toamnă au plecat 3/4 din rest şi încă trei tovarăşi; iar ultimii 10 tovarăşi au fost repartizaţi la alte munci. Care a fost numărul total de muncitori?

7.34. Pe o linie dublă de cale ferată, un tren accelerat lung de 60 m depăşeşte un tren de persoane lung de 80 m, şi care merge în acelaşi sens, în 28 secunde. Acelaşi tren accelerat întîlneşte la întoarcere trenul de persoane pe lîngă care trece în 4 secunde.

Care sînt vitezele celor două trenuri?

G.M.B., 1970, pag. 689

7.35. Din fondul de premii al unei întreprinderi i-a revenit unui muncitor 4/9 din el şi încă 100 lei; altuia 2/3 din rest şi încă 100 lei; celui de-al treilea 1/5 din noul rest au mai rămas 140 lei. Ce sumă a primit fiecare muncitor?

G.M.B., 1959, pag. 620

7.36. O brigadă de tractorişti a arat un teren al unei cooperative agricole de producţie. În prima zi a arat 1/3 din teren, în a doua zi a arat 2/7 din ce a rămas din prima zi, iar în a treia zi a arat 2/5 din ce a rămas din a doua zi şi în fine în a patra zi a arat 4/5 din ce mai rămăsese după a treia zi şi încă 3 ha terminînd de arat. Cîte ha are terenul?

7.37. Un grup de excursionişti ar putea parcurge o anumită distanţă cu trenul în 10 ore, iar cu automobilul în 12 ore. Ei au mers însă 6 ore cu trenul, 4 ore cu automobilul, apoi au mai mers pe jos 36 km şi au ajuns la capăt. Să se afle:

a) lungimea drumului;

b) viteza trenului şi viteza automobilului;

c) distanţa parcursă cu fiecare vehicul.

G.M.B., 1959, pag. 493

Scanned with OKEN Scanner

7.38. O brigadă de tractorişti ară un teren în 16 zile. După 6 zile, timp în care s-au arat 288 ha, două tractoare trec la altă lucrare şi terenul se termină de arat în $13\frac{1}{3}$ zile. Se cere: 1) Care este întinderea terenului? 2) Cîte tractoare sînt în brigadă? 3) Cîte hectare ară un tractor zilnic?

G.M.B., 1958, pag. 614

7.39. Într-un bazin sînt două robinete. La început s-a deschis primul robinet; după trei ore bazinul s-a umplut pînă la jumătate cînd s-a deschis şi al doilea robinet. După două ore s-a umplut întreg bazinul. Care este capacitatea bazinului ştiind că prin al doilea robinet curg 21 litri de apă pe oră.

7.40. O lucrare poate fi efectuată de 15 lucrători în 20 de zile. După ce lucrează 8 zile din cei 15 lucrători, 6 pleacă detaşaţi pe alt şantier. În cîte zile lucrătorii rămaşi pot termina lucrarea?

7.41. O roată dinţată are 60 de dinţi şi face 720 de ture în 9 minute. Să se calculeze cîte ture va face în timp de 10 minute o roată care are 48 de dinţi şi este angrenată cu prima.

7.42. O barcă cu motor mergînd în sensul apei străbate distanţa între două porturi în $13\frac{1}{2}$ ore, iar în contra apei în 18 ore. Să se afle în cîte ore va străbate aceeaşi distanţă o luntre care ar fi luată numai de curentul apei.

G.M.B., 1960, pag. 60

7.43. La un concurs s-au acordat celor patru elevi reuşiţi premii în valoare de 1 380 lei. Elevii au primit fiecare o sumă de bani direct proporţională cu numărul punctelor obţinute. Să se afle ce sumă a primit fiecare elev, ştiind că: primul a realizat un număr de puncte egal cu 3/4 din cele realizate de al patrulea; al doilea a realizat 8/9 din cele realizate de al treilea; iar al treilea 9/10 din numărul punctelor realizate de al patrulea şi că în total au realizat 69 puncte.

G.M.B., 1959, pag. 620

7.44. Patru tractoare au arat împreună 125 hectare. Partea arată de primul tractor, faţă de partea arată de-al doilea se află în raportul de 2/3; partea arată de-al doilea faţă de al treilea se află în raportul 4/5; iar partea arată de tractorul al treilea faţă de al patrulea se află în raportul 6/11. Să se afle cîte hectare a arat fiecare tractor.

G.M.B., 1962, pag. 614

7.45. La o fermă agricolă de stat pentru a ara un teren de 2 280 ha, lucrează 15 tractoare timp de 16 zile.

a) Cîte tractoare sînt necesare pentru a ara un teren de 1 596 ha în 24 zile. Să se rezolve prin metoda aşezării şi apoi cu ajutorul lucrului unui tractor pe zi.

b) Cît porumb se recoltează pe cele două terenuri în total dacă producţia anuală pe un ha la primul teren este $5\,583\frac{1}{4}$ kg, iar la al doilea este 5 497,29 kg.

Concursul de matematică clasa VI, Tg.-Mureş, 1966

Scanned with OKEN Scanner

Algebra

Capitolul VIII

8.1. Să se arate că produsul a două numere terminate cu 76 se termină tot cu 76. Idem cu 25.

8.2. Să se demonstreze că pătratul unui număr impar mai mare ca doi este multiplu de 8 mărit cu unu.

8.3. Dacă la produsul a patru numere consecutive se adaugă dublul produs al numerelor din mijloc se obține pătratul produsului numerelor din mijloc.

G.M.B., 1964, pag. 145

8.4. Fie A, B, C, D patru puncte aflate pe o dreaptă în ordinea dată, să se arate că:

$$AC^2 + BD^2 + 2AB \cdot CD = AD^2 + BC^2$$

8.5. Să se arate că dacă din produsul a patru numere consecutive se scade dublul produs al numerelor extreme se obține pătratul produsului numerelor extreme.

G.M.B., 1960, pag. 115

8.6. Suma cifrelor unui număr de trei cifre reprezintă numărul format din cifra sutelor și cifra zecilor. Dacă dublăm cifra zecilor obținem suma dintre cifra sutelor și cifra unităților. Să se afle numărul.

G.M.B., 1962, pag. 682

8.7. Să se arate că:

$$1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc = (1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

8.8. Pe o dreaptă se iau patru puncte A, B, C, D în ordinea dată. Să se arate că:

$$AC^2 + BC \cdot CD + BD \cdot CD = BD^2 + AB \cdot AC + AB \cdot BC.$$

G.M.B., 1960, pag. 370

8.9. Să se verifice egalitatea:

$(a-3)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 = (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+6)^2$ oricare ar fi a.

Scanned with OKEN Scanner

8.10. Să se arate că:

$$(x^6 + x^5 - x^3 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^8 + x^4 + 1.$$

8.11. Să se arate că:

$$(a + b)^2 + (5a + b)^2 + (6a + b)^2 = (2a + b)^2 + (3a + b)^2 + (7a + b)^2$$

oricare ar fi a și b.

8.12. Să se arate că:

$$(a + b - 2c)^2 + (b + c - 2a)^2 + (c + a - 2b)^2 = 3[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

8.13. Să se arate că:

$$ab(a^2 - b^2)(2cd + c^2 - d^2)(2cd - c^2 + d^2) + cd(c^2 - d^2)(2ab + a^2 - b^2) \cdot (2ab - a^2 + b^2) = (ad + bc)(ac - bd)(ad + bc + ac - bd)(ad + bc - ac + bd).$$

8.14. Să se arate că:

$$a(a - c)^2 + b(b - c)^2 - (a - c)(b - c)(a + b - c) = b(b - a)^2 + c(c - a)^2 - (b - a)(c - a)(-a + b + c) = c(c - b)^2 + a(a - b)^2 - (c - b)(a - b)(a - b + c).$$

8.15. Să se arate că:

$$(x - y)^3(x + y) = (x^2 - xy)^2 - (xy - y^2)^2.$$

8.16. Să se arate că:

$$(a + b)^4 + (a - b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2).$$

8.17. Să se arate că:

$$a(a + 4)(a + 8)(a + 12) + 256 = (a^2 + 12a + 16)^2.$$

G.M.B., 1957, pag. 50

8.18. Să se arate că:

$$m(1 + n)^2 + n(1 - m)^2 + (m + n)(1 - mn) = 2(m + n);$$

$$ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) + (ay + bx)(by - ax) = 2by(ay + bx).$$

8.19. Să se calculeze expresia:

$$E = [ax + by - (a + b)z]^2 \cdot [ay + bz - (a + b)x] + [ax + by + (a + b)z] \cdot [ay + bz - (a + b)x] \cdot [az + bx - (a + b)y] + [ax + by - (a + b)z] \cdot [ay + bz - (a + b)x]^2.$$

8.20. Să se demonstreze identitatea:

$$(1 + 2a)^3 + (1 + 2b)^3 + (1 - 2a - 2b)^3 + 24(1 - a)(1 - b)(1 + a + b) = 27.$$

8.21. Să se arate că dacă

$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = 1$ și $2ax + 2by + 1 = 0$, atunci

$$(3x - a)^2 + (3y - b)^2 = (4x + 3a)^2 + (4y + 3b)^2 = (a - 2b\sqrt{3})^2 + (b + 2a\sqrt{3})^2 = 13.$$

Scanned with OKEN Scanner

8.22. Să se arate că dacă

$$A = a^2b^2;\ B = 2ab(a^2 + b^2);\ C = (a^2 + b^2)^2 + 2a^2b^2,$$

atunci

$$2A + 2B + C = (a + b)^4;\ 2A - 2B + C = (a - b)^4.$$

8.23. Să se verifice identitatea:

$$(a + b - 2c)(c + a - 2b)^2 + (a + b - 2c)(b + c - 2a)(c + a - 2b) + (c + a - 2b)(a + b - 2c)^2 = 0.$$

G.M.B., 1957, pag. 51

8.24. Se dă produsul $(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$ unde $2p = a + b + c + d$. Care este valoarea produsului, dacă $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

G.M.B., 1964, pagi 317

8.25. Să se arate că:

$$x^3y(xy + 2z^2) + y^3z(yz + 2x^2) + z^2x(zx + 2y^2) = (x^2y + y^2z + z^2x^2).$$

8.26. Să se arate că:

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).$$

8.27. Să se arate că:

$$16a^2b^2(a^2 - b^2)^2 + (2ab + a^2 - b^2)^2(2ab - a^2 + b^2)^2 = (a^2 + b^2)^4.$$

8.28. Să se descompună în produs de factori expresia:

$$E = (x + y)(y + z)(x + 2y + z) + (x + y)(x + z)(y + 2x + z) + (y + z)(z + x)(x + 2z + y) + 2(x + y)(y + z)(z + x).$$

G.M.B., 1961, pag. 33

8.29. Să se calculeze expresia:

$$(7x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 12)^2 + (7x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x + 12)^2 + (7x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 12)(-14x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 10x - 24).$$

G.M.B., 1958, pag. 405

Capitolul IX

9.1. Să se arate că:

$$\frac{a + b}{2ab}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{b + c}{2bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c + a}{2ca}(a^2 + c^2 - b^2) = a + b + c,$$

a, b, c, fiind diferite de zero.

G.M.B., 1959, pag. 110

Scanned with OKEN Scanner

9.2. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{bc+a+1}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac+b+1}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab+c+1}{(c-a)(c-b)}=1,$$

a, b, c fiind numere diferite între ele.

G.M.B., 1958, pag. 680

9.3. Să se arate că:

$$\frac{24}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{1}{x}-\frac{4}{x-1}+\frac{6}{x-2}-\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4},$$

x fiind diferit de 0, 1, 2, 3 şi 4.

G.M.B., 1958, pag. 478

9.4. Dacă $b^2+c^2=a^2$ şi $b\neq c$ să se arate că:

$$E=\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{b^3-c^3}{b-c}=2a^2.$$

9.5. Să se efectueze:

$$\left(\frac{1}{2x-y}+\frac{3y}{y^2-4x^2}+\frac{2}{2x+y}\right)\left(\frac{4x^2+y^2}{4x^2-y^2}+1\right).$$

9.6. Să se arate că:

$$\frac{1+a+b-3ab}{(1-a)\ (1-b)}=\frac{2}{1-a}+\frac{2}{1-b}-3=$$

$$=\frac{2a}{1-a}+\frac{2b}{1-b}+1=\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}-1.$$

9.7. Să se arate că:

$$\frac{2(1-ax)}{a-\frac{1}{x}}+\frac{1+b(1+x)}{b+\frac{1}{1+x}}+\frac{1-b(1-x)}{b-\frac{1}{1-x}}=0.$$

9.8. Să se arate că:

$$a^2+\frac{1}{a^2}-8\left(a-\frac{1}{a}\right)+14=\left(a-\frac{1}{a}-4\right)^2.$$

9.9. Să se arate că expresia:

$$\frac{(x+1)\ (x^2-x+1)\ (x^6-x^3+1)\ (x^{18}-x^9+1)\ (x^{27}-1)}{(x-1)\ (x^2+x+1)\ (x^6+x^3+1)\ (x^{18}+x^9+1)\ (x^{27}+1)}$$

nu depinde de x.

G.M.B., 1960, pag. 116

9.10. Să se arate că dacă $a\neq b\neq c$, avem:

$$\frac{a^2}{(a-b)\ (a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)\ (b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)\ (c-b)}=1.$$

9.11. Să se arate că:

$$\frac{1}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}}+\frac{1}{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}}=a^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.12. Să se arate că:

$$\frac{1-a^3}{1+(1+a)^3}=\frac{1-a}{2+a}=1-\frac{1+2a}{2+a};$$

$$\frac{x^3-a^3}{x^3+(x+a)^3}=\frac{x-a}{2x+a}=1-\frac{x+2a}{2x+a}.$$

9.13. Să se demonstreze că:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-bc)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-ac)}+$$

$$+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-ab)}=\frac{abc}{(x-ab)(x-bc)(x-ac)}.$$

G.M.B., 1958, pag. 734

9.14. Să se arate că:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2=4+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right).$$

9.15. Să se arate că:

$$\frac{9x^2+6xy+y^2-25}{9x^2-y^2-15x+5y}=\frac{3x+y+5}{3x-y}=1+\frac{2y+5}{3x-y}.$$

9.16. Să se arate că:

$$\frac{1-x}{1+x}+\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=0.$$

9.17. Să se arate că:

$$\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}=\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}}=x.$$

9.18. Să se demonstreze că dacă $a\neq b\neq c\neq 1$, avem:

$$\frac{a(1-a)}{(a-b)(c-a)}+\frac{b(1-b)}{(a-b)(b-c)}+\frac{c(1-c)}{(b-c)(c-a)}=1.$$

9.19. Să se arate că:

$$\frac{a^2-bc}{a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{c^2+ab}=\frac{ab-c^2}{ab+c}\cdot\frac{bc-a^2}{bc+a^2}\cdot\frac{ca-b^2}{ca+b^2}.$$

9.20. Să se verifice identitățile:

$$\frac{a}{1-\frac{1}{a}}+\frac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{1-a}}+\frac{\frac{1}{1-a}}{a}=3;\quad \frac{1-a}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1+\frac{1}{a}}{1-a}+\frac{1+a}{1-\frac{1}{a}}+\frac{1-\frac{1}{a}}{1+a}=4.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.21. Să se arate că $E = a$, dacă:

$$E = \frac{1 - \frac{1-A}{1+A}}{1 + \frac{1-A}{1+A}}, \qquad A = \frac{1 - \frac{1+B}{1-B}}{1 + \frac{1+B}{1-B}} \quad \text{și} \quad B = \frac{1 - \frac{1+a}{1-a}}{1 + \frac{1+a}{1-a}}.$$

9.22. Să se demonstreze identitatea:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} - \frac{c}{a}\right)(a+b-c) + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(a-b+c) +$$
$$+ \left(-\frac{a}{b} + \frac{b}{c} - \frac{c}{a}\right)(-a+b+c) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(a+b+c) =$$
$$= 4\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right).$$

G.M.B., 1958, pag. 234

9.23. Se dau expresiile: $E_1 = (ax+b)^2 - (b-ax)^2 - 2abx$; $E_2 = [a + b(x+a^2)]:\left(b + \frac{a}{x+a^2}\right) + (b - a^2x):\left(a^2 - \frac{b}{x}\right)$; $E_3 = [b + a(a + 2b^2x^2)]:\left(a + \frac{b}{a+2b^2x^2}\right) -$
$- [a(a + b^2x^2) - b]:\left(a - \frac{b}{a+b^2x^2}\right)$ unde $a, b \in N$ și se cere:

a) Să se aducă la forma cea mai simplă cele trei expresii.
b) Să se arate că suma $E_1 + E_2 + E_3$ este un patrat perfect.
c) Să se scrie sub formă de produs expresia $E = E_1^2 - (E_2 + E_3)^2 + 4$.

Concurs la clasa a VII-a, 1970, Județul Dîmbovița.

9.24. Să se arate că:

$$\frac{a + b - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{a+b} = 1 - \frac{1}{ab}.$$

9.25. Să se reducă la cea mai simplă formă expresia:

$$E = \frac{\left(\frac{3a-1}{a+1} - \frac{a+1}{2a-2} + \frac{1}{2} - \frac{5a}{a+1}\right):\frac{2a}{a-1} + \frac{2a}{3}\left(\frac{a+4}{a-6} + 1\right)}{\frac{1}{3}\left[4a + 17 + 3\left(\frac{1}{a+1} + \frac{40}{a-6}\right)\right]}.$$

G.M.B., 1964, pag. 129

9.26. Să se arate că dacă $a \neq 1$, și notăm:

$$\frac{1-a}{1-\frac{1}{a}} = x;\ 1 - \frac{1}{x} = y,\ 1 - \frac{1-x}{y} = \frac{1}{A} \text{ și}$$

$$1 - \frac{y}{1-x} = \frac{1}{B}, \text{ atunci } A + B = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.27. Să se arate că:

$$\left(a+\frac{1-x}{1+x}\right):\left(a-\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)=\left(a-\frac{1-x}{1+x}\right):\left(a+\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\left(a+\frac{1+x}{1-x}\right):\left(a-\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=\left(a-\frac{1+x}{1-x}\right):\left(a+\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=1.$$

9.28. Să se arate că:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n};$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2}.$$

9.29. Dacă A, B, C, D sînt puncte pe o dreaptă, aşezate în ordinea dată, există relaţia:

$$\frac{AD}{AB}+\frac{BC}{CD}=\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)BD.$$

G.M.B., 1964, pag. 308

9.30. Să se arate că:

$$\frac{1+\sqrt{2}+a}{1+a\sqrt{2}-a}=1+\sqrt{2}.$$

9.31. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{a-bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{b-ac}{(a-b)(b-c)}+\frac{c-ab}{(c-a)(b-c)}=1,$$

ştiind că a, b, c sînt diferite între ele.

G.M.B., 1960, pag. 494

9.32. Să se arate că:

$$\frac{x+y}{x-y}\left(1+\frac{xyz}{(x-y)^2}\right)+\frac{(x+y)(z-1)}{x-y}=\frac{(x^3-y^3)z}{(x-y)^3}.$$

9.33. Să se arate că dacă:

$$\frac{a+b}{3a-b}=\frac{b+c}{3b-c}=\frac{c+d}{3c-d}=\frac{d+a}{3d-a},$$

atunci avem:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da.$$

G.M.B., 1958, pag. 235

Scanned with OKEN Scanner

9.34. Se dă expresia

$$E=\frac{\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}}{\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}-1}\right)}\cdot\frac{1-\dfrac{4x}{(x+1)^2}}{x-4}.$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
b) Pentru ce valori ale lui x expresia nu are sens.
c) Să se afle valoarea lui x pentru care $E=-\frac{1}{2}$.
d) Să se verifice calculele prin înlocuirea lui x cu valoarea numerică găsită.

Concursul de matematică, clasa VIII, Braşov, 1966

9.35. Dacă avem relaţiile $\frac{a}{b}=\frac{c+b}{d+a}$ şi $\frac{c}{d}=\frac{b+d}{a+c}$ să se arate că:

$$E_1=\frac{a+b}{c+d}+\frac{c-d}{a-b}=-1 \text{ şi } E_2=\frac{a-b}{c-d}-\frac{c+d}{a+b}=1.$$

9.36. Să se arate că:

$$\frac{\dfrac{1}{(1-a)^4}-\dfrac{1}{(1+a)^4}}{\dfrac{1}{(1-a)^4}+\dfrac{1}{(1+a)^4}}=\frac{4a^2+(1+a^2)^2}{4a(1+a^2)}.$$

9.37. Să se arate că dacă $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{m}$ atunci:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-m)(b-m)(c-m)}=\frac{abc}{m^3}.$$

G.M.B., 1958, pag. 478

9.38. Să se arate că dacă $x^2+a^2=1$, avem :

$$\frac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^2-\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^2}{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^2+\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^2}+x^2=a^2.$$

9.39. Dacă $z=\frac{a-xy}{x+y}$ să se arate că:

$$x=\frac{a-yz}{y+z} \text{ şi } y=\frac{a-xz}{x+z}.$$

9.40. În ce condiţii avem:

$$\frac{a+\dfrac{abc}{a-bc+b}}{b+\dfrac{abc}{a-ac+b}}=\frac{a-\dfrac{ab}{a+2b}}{b-\dfrac{ab}{2a+b}}=\frac{\dfrac{2ab}{a-b}+a}{\dfrac{2ab}{a-b}-b}=\frac{a}{b}.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.41. Dacă există relația:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a+b}{c+d}, \text{ atunci există și relația}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a-c}{b-d} \cdot \left(\frac{b-c}{a-d} + \frac{a-d}{b-c}\right).$$

G.M.B., 1959, pag. 51

9.42. Să se arate că dacă:

$$x \neq \frac{1}{b},\ y \neq \frac{1}{b} \text{ și } y = \frac{x+a}{bx-1}, \text{ atunci } x = \frac{y+a}{by-1}.$$

9.43. Să se arate că dacă:

$$\frac{1}{a} = \frac{bcd + bc + bd + cd}{x - bcd}, \text{ atunci avem}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{acd + ac + ad + cd}{x - acd} \text{ și încă două relații analoge cu acestea.}$$

9.44. Dacă:

$$\frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{m}{n},$$

să se arate că

$$(na + nb - mz)^2 + (nb + nc - mx)^2 + (nc + na - my)^2 =$$
$$= (mx + my - nc)^2 + (my + mz - na)^2 + (nz + nx - mb)^2.$$

G.M.B., 1958, pag. 535

9.45. Să se arate că dacă:

$$\frac{1}{x} + \frac{1 + xzt}{a + y + z + t} = 0, \text{ atunci mai avem:}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1 + xzt}{a + x + z + t} = 0 \text{ și alte două relații analoge.}$$

9.46. Să se arate că dacă:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ și } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

unde a, b, c, x, y, z sînt diferite de zero, atunci avem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

9.47. Să se arate că dacă:

$$xyz = 1, \text{ avem și}$$

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx} = 1.$$

G.M.B., 1961, pag. 757

Scanned with OKEN Scanner

9.48. Să se arate că dacă:

$$\frac{ab+c}{ac+b}=\frac{ad+b}{ab+d}=2,$$

atunci

$$\frac{ac+b}{ab+d}=\frac{b-c}{d-b}.$$

G.M.B., 1959, pag. 495

9.49. Dacă $x=\frac{a}{b+c}$; $y=\frac{b}{c+a}$ și $z=\frac{c}{a+b}$, atunci $xy+yz+zx=1-2xyz$.

9.50. Se dă:

$$y=\frac{ax-b}{bx-a}.$$

Ținînd seama de această relație, să se arate că:

$$x=\frac{ay-b}{by-a};\quad \frac{1+xy}{x+y}=\frac{a}{b}\quad \text{și}\quad \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

9.51. Să se arate că dacă:

$$a\neq b\neq c, \text{ avem:}$$

$$\frac{ab(a+b)}{(a-c)(b-c)}+\frac{bc(b+c)}{(b-a)(c-a)}+\frac{ca(c+a)}{(c-b)(a-b)}=a+b+c.$$

9.52. Să se calculeze expresia aducînd-o la forma cea mai simplă:

$$E=\frac{\frac{1}{8+4x}+\frac{1}{8-4x}+\frac{(3x+3)^2}{x^2-4}}{\frac{\frac{1}{2}}{x^2-4x+4}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+4x+4}-\frac{8}{(x^2-4)^2}}.$$

9.53. Să se arate că:

$$\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}=-1,$$

unde $a\neq b\neq c$.

9.54. Să se arate că:

$$\frac{(a+b)^3(a-b)+(b+c)^3(b-c)+(c+a)^3(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}+2=0.$$

G.M.B., 1959, pag. 181

9.55. Să se arate că dacă:

$$a=\frac{1-(1-b):(1+b)}{1+(1-b):(1+b)},$$

atunci

$$b=\frac{1-(1-a):(1+a)}{1+(1-a):(1+a)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

10.1. Un pionier are asupra sa mai puţin de 100 lei, însă îi mai lipsesc atîţi lei cît ar avea peste 100 dacă ar avea de 9 ori cît are acum. Să se calculeze cîţi lei are pionierul.

10.2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{2}{3}\left[2x-\frac{5(x+1)}{4}\right]+\frac{2+4x}{2}=\frac{3}{2}.$$

G.M.B., 1959, pag. 743

10.3. Un tată este mai în vîrstă decît fiul său cu 30 de ani. Acum trei ani vîrsta tatălui era mai mare de $2\frac{1}{2}$ ori decît vîrsta fiului. Care este vîrsta fiecăruia?

G.M.B., 1959, pag. 624

10.4. Să se afle valoarea lui x pentru care avem:

$$\frac{\left[5\sqrt{1,447209}-3\frac{7}{16}:\left(1,5-\frac{23,5}{36,5}\right)\right]x}{\left[2,(45)+8\frac{3}{11}-4\frac{1}{4}:(1-11,7:26)\right]x-5}=1,5$$

G.M.B., 1960, pag 434

10.5. Într-o echipă de săpători, un muncitor a săpat 3 m³, iar ceilalţi cîte 5 m³. Dacă fiecare ar fi săpat cîte 4 m³, ar fi rămas nesăpaţi 12 m³. Cîţi metri cubi s-au săpat în total?

10.6. Producţia într-o uzină în luna martie a fost cu 30% mai mare decît în februarie, iar în februarie a fost cu 10% mai mică decît cea din ianuarie. Cu cît la sută producţia din martie a fost mai mare sau mai mică decît cea din ianuarie.

10.7. Să se afle valorile lui x diferite de zero pentru care:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{ax}}+\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{a}{x}}=x;$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{ax}}+\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{x}{a}}=a, \text{ unde } a\neq 0;\ a\neq 1.$$

10.8. Împărţind un număr la 7, cîtul obţinut este mai mic decît deîmpărţitul cu 125, iar restul este 1/4 din cît. Să se afle numărul.

G.M.B., 1958, pag. 405

10.9. Să se rezolve ecuaţiile:

$$\frac{1}{-\frac{1}{x}+\frac{1}{ax}}+\frac{1}{-\frac{1}{x}+\frac{a}{x}}=-a;$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{a}+\frac{1}{ax}}+\frac{1}{-\frac{1}{a}+\frac{x}{a}}=-x.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.10. Doi pionieri citesc aceeaşi carte. După ce primul a citit 165 pagini, iar cel de-al doilea 225 pagini, se constată că primului i-au mai rămas de citit de 5 ori mai multe pagini decît celui de-al doilea. Cîte pagini are cartea?

10.11. Raportul salariilor a doi funcţionari era $\frac{8}{11}$. Mărindu-se salariul primului cu 120 lei, iar cu 150 al celui de-al doilea care avea un salariu mai mare, raportul salariilor a devenit $\frac{11}{15}$. Ce salariu are acum fiecare?

G.M.B., 1963, pag. 713

10.12. Grîul recoltat de pe o anumită suprafaţă de teren a unei cooperative agricole de producţie a fost transportat de pe aria de treierat la magazia cooperativei. Dacă s-ar fi folosit pentru transport un anumit număr de căruţe, ar fi trebuit ca fiecare căruţă să încarce de cîte 25 de ori. Însă cooperativa a folosit 6 căruţe mai mult şi astfel, fiecare căruţă încărcînd numai de 10 ori, tot grîul a fost transportat la magazie.

Să se afle numărul total de căruţe folosite şi cantitatea de grîu depozitată în magazie, ştiind că fiecare căruţă a transportat cîte 12 saci a 5 ddal fiecare sac şi că masa hectolitrică a fost de 82 kg.

G.M.B., 1962, pag. 351

10.13. Să se arate că la orice număr de trei cifre, la care cifra zecilor este media aritmetică a celorlalte două cifre, adunîndu-se o singură dată numărul ce-l formează cifra unităţilor sale se obţine un număr divizibil cu 7.

G.M.B., 1961, pag. 375

10.14. Conform depăşirii de plan, s-a acordat la trei muncitori ai unei uzine, un premiu în valoare de lei 900. Să se afle ce sumă a primit fiecare, dacă primul a primit 175%, iar al doilea 125% din cît a primit al treilea?

G.M.B., 1958, pag. 547

10.15. Dintr-un vas se scoate pe rînd: 1/2 din conţinut şi încă 1 l; 2/3 din rest şi încă 2 l; 3/5 din noul rest şi încă 3 l şi în fine 1/2 din cît mai rămăsese şi încă 5 litri. În butoi mai rămîn 12 litri. Să se afle capacitatea butoiului.

10.16. Suma a patru numere este 2 037. Primul număr este 75% din al doilea; al doilea este 30% din al treilea şi al treilea este 68% din al patrulea. Care sînt aceste numere?

10.17. Se dă expresia

$$E = \frac{\frac{0{,}5}{9 - 6x + x^2} - \frac{1}{x^2 - 9} + \frac{0{,}5}{x^2 + 6x + 9}}{\left(\frac{1}{2x+6} + \frac{1}{9-3x}\right) \cdot \left(\frac{2}{x-15} - \frac{2x}{x^2-9}\right)}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia obţinută are valoarea 4.

G.M.B., 1959, pag. 744

10.18. Doi motocicliști pleacă în același moment, unul din localitatea A spre localitatea B, celălalt din B spre A. Ei se întîlnesc prima dată la 45 km de B, apoi continuîndu-și drumul ajung în B, respectiv în A și se întorc fără oprire întîlnindu-se a doua oară la 15 km de A. Știind că a doua oară s-au întîlnit după prima întîlnire la 3 ore, se cere să se calculeze vitezele cu care au mers cei doi motocicliști, precum și distanța AB.

10.19. Distanța dintre două localități A și B este de 60 km. Din localitatea A pleacă simultan doi bicicliști. Știind că primul merge cu o viteză medie care întrece viteza celuilalt cu 3 km pe oră și ajunge în localitatea B cu o oră înaintea celui de-al doilea biciclist. Să se afle viteza celor doi bicicliști.

10.20. Un elev citește în trei zile 331 pagini. Cît a citit în ziua a treia, dacă citește cu 10% mai mult decît în a doua, cînd a citit de asemenea cu 10% mai mult decît în prima zi.

G.M.B., 1958, pag. 234

10.21. Folosind relațiile între termenii și rezultatul unei operații, să se determine x din egalitatea:

$$96 : \{[1344 - (15 + x)19] : 17 - 38\} = 8.$$

10.22. Două bucăți de stofă aveau aceeași lungime. În prima zi s-a vîndut din prima bucată 32 metri, și din a doua 20 metri; iar bucățile rămase au rămas în raportul $\frac{85}{100}$. A doua zi s-au vîndut din ambele bucăți rămase cantități egale, și anume au rămas în raportul $\frac{60}{100}$. Care a fost lungimea bucăților și cît s-a vîndut în a doua zi?

G.M.B., 1959, pag. 109

10.23. Costul a două covoare este 1840 lei. Cît costă fiecare covor dacă $\frac{5}{7}$ din prețul primului covor este cît $\frac{3}{5}$ din prețul celui de-al doilea covor.

10.24. Două baloturi de stofă au în total $79\frac{1}{2}$ m. Se vinde din primul balot 2/7 și din al doilea 1/5 și rămîn cantități egale. Cîți metri a avut fiecare balot?

G.M.B., 1959, pag. 622

10.25. O brigadă de tractoriști a arat cu 750 ha mai mult decît o altă brigadă, iar 2/5 din terenul arat de prima brigadă face cît 4/9 din terenul arat de cealaltă brigadă. Cîte hectare a arat fiecare brigadă?

G.M.B., 1962, pag. 628

10.26. La o combină un lanț de transmisiune trece peste 4 roți dințate avînd 42, 56, 34 și 60 dinți. Știind că toate roțile au făcut în total 91 rotații, se întreabă cîte rotații a făcut fiecare.

10.27. Să se afle care din fracțiile următoare este mai mare:

$$\frac{33\,333\,333\,331}{33\,333\,333\,334} \text{ sau } \frac{22\,222\,222\,221}{22\,222\,222\,223}.$$

Se vor căuta procedee cît mai simple care să se poată aplica şi în cazul altor fracţii de aceeaşi formă, dar mai generale.

10.28. Un funcţionar primeşte salariul, din care 672 lei îi întrebuinţează pentru a cumpăra: o cămaşă, o cravată şi un costum de haine. Ştiind că diferenţa între costul cămăşii şi al cravatei este 28 lei, iar raportul dintre costul costumului şi al cămăşii este 8, să se afle costul cămăşii, al cravatei şi al costumului.

G.M.B., 1959, pag. 41

10.29. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3-3(x+a)(x+b)(x+c)}{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}=1.$$

G.M.B., 1958, pag. 583

10.30. Să se afle în care sistem de numeraţie există relaţia:

$$\left(\frac{2}{12}+\frac{1}{10}\right)\frac{120}{102}=1.$$

10.31. O vînzătoare vinde primului cumpărător 1/3 din totalul de ouă pe care le are plus 1/3 de ou. Celui de-al doilea îi vinde 1/4 din rest plus 3/4 de ou. Celui de-al treilea îi vinde 1/5 din noul rest plus 1/5 de ou. La fiecare cumpărător a vîndut însă un număr întreg de ouă şi i-au mai rămas nevîndute 19. Cîte ouă a avut şi cîte a vîndut fiecărui cumpărător?

G.M.B., 1959, pag. 182

10.32. Raportul a două numere este 5/3. Dacă scădem 10 din primul şi adăugăm 10 celuilalt, raportul numerelor obţinute devine 3/5. Să se afle cele două numere.

10.33. Trei pionieri au depus într-o săptămînă la C.E.C. suma de 45 lei. Dacă suma celui de-al doilea s-ar dubla, iar a celui de-al treilea s-ar tripla, ei ar avea împreună 84 lei. În cazul că suma celui de-al doilea se triplează şi a celui deal treilea se dublează, suma creşte cu încă 3 lei faţă de situaţia precedentă. Ce sumă a depus la C.E.C. fiecare pionier?

G.M.B., 1961, pag. 438

10.34. Masele specifice a două corpuri sînt în raport de $\frac{5}{7}$. Să se afle masele lor specifice, ştiind că 6 dm³ din primul corp şi 8 dm³ din al doilea corp cîntăresc împreună 86 kg.

10.35. Fie două numere diferite. Dacă scădem din fiecare jumătatea celui mic, atunci numărul cel mare devine de cinci ori mai mare decît numărul mic. De cîte ori a fost mai mare numărul cel mare decît cel mic?

10.36. Un fluviu se varsă în mare prin două braţe. Pe fiecare braţ, la vărsare în mare este cîte un port. Lungimea braţelor este respectiv de 96 şi 75 km. O navă parcurge distanţa de la un port la celălalt navigînd pe fluviu atît la dus cît şi la întors, 9 ore. Viteza navei pe o apă stătătoare este de 20 km/oră. Care este viteza curentului pe cele două braţe?

Scanned with OKEN Scanner

10.37. Cineva a cheltuit $\frac{3}{13}$ din suma ce a avut. A doua oară mai cheltuieşte $\frac{4}{11}$ din ce mai rămăsese, iar a treia oară mai cheltuieşte $\frac{4}{7}$ din ce mai avea şi constată că i-a mai rămas cu 6 lei mai puţin decît a cheltuit prima dată. Să se arate cît a cheltuit de fiecare dată.

10.38. Din banii puşi la dispoziţia unei fabrici pentru nevoile culturale, $\frac{2}{9}$ au fost cheltuite pentru tabăra copiilor, 2/3 din rest au fost cheltuiţi pentru amenajarea colţului viu în şcoală, 3/7 din ce a rămas, pentru înzestrarea sălii de gimnastică şi 1/10 din ultimul rest au fost cheltuiţi cu amenajarea terenului de sport, după care au mai rămas 3 600 lei pentru bibliotecă. Care a fost suma pusă la dispoziţia fabricii?

10.39. La o întrecere între două echipe de mineri, prima a depăşit norma cu 20% şi a doua cu 30% şi amîndouă au scos 226 tone de cărbuni. A doua zi prima echipă a depăşit norma cu 30% şi a doua echipă cu 20% şi au scos împreună 224 tone de cărbuni. Care a fost norma fiecărei echipe?

10.40. Dacă lungimea unui dreptunghi creşte cu 12%, iar lăţimea se reduce cu 12%, atunci aria dreptunghiului se micşorează cu 288 metri pătraţi. Care a fost aria dreptunghiului?

10.41. La un laborator sînt 3 vase care conţin soluţie din acelaşi acid de concentraţii, respectiv 15%, 30% şi 50%.

Fiind nevoie de 25 litri de acid cu 40% concentraţie, să se afle cît acid de 15% şi cît de 50% trebuie luat pentru a obţine acidul necesar dacă din acidul de 30% s-au luat numai 7 litri.

10.42. O fabrică a depăşit planul anual, dînd mărfuri peste plan în valoare de un milion de lei, producţia realizată fiind cu 15% mai mare decît cea din anul trecut. Pe anul în curs s-a planificat ca producţia să fie cu 5% mai mare decît cea de anul trecut. Să se calculeze valoarea producţiei pe anul în curs.

10.43. Se topeşte un aliaj de argint cu titlul de 0,836 cu altul al cărui titlu este 0,900 şi se obţine 5 kg de un nou aliaj cu titlul de 0,860. Cît s-a topit din fiecare aliaj?

10.44. Două persoane au împreună suma de 200 lei. Dacă prima dă celei de-a doua o şesime din cît are ea, a doua va avea jumătate din cît rămîne primei persoane. Cît a avut fiecare persoană?

10.45. La un schimb de muncă, 2 muncitori au depăşit norma faţă de tovarăşii lor din schimbul I cu 2 560 kg cărbune. Ştiind că 25% din cantitatea normei muncitorilor din primul schimb face 20% din norma muncitorilor din schimbul al II-lea, să se afle cantitatea de cărbune scoasă de fiecare muncitor pe oră.

G.M.B., 1960, pag. 493

Scanned with OKEN Scanner

10.46. Două cărți costau împreună 30 lei. Știind că la una s-a redus prețul cu 10%, și la cealaltă cu 15% și că după reducere costă împreună 26,40 lei, să se afle cît costă fiecare carte.

10.47. Ca urmare a progreselor realizate în înzestrarea tehnică a agriculturii țării noastre, numărul tractoarelor de la o întreprindere de mecanizare a agriculturii a crescut în 1965 cu 150% față de 54 tractoare avute în anul 1959.

a) Ce suprafață arabilă a deservit în anul 1959 dacă la 6 tractoare reveneau 1620 ha teren arabil?

b) Ce suprafață arabilă a deservit în anul 1965 dacă în acest an suprafața repartizată pentru 9 tractoare a fost egală cu cea repartizată în anul 1959 pentru un număr de 4 tractoare?

c) Care este numărul tractoarelor fizice cu care a fost înzestrată agricultura țării noastre la finele anului 1965 dacă 15% din acest număr este de 90 de ori mai mare decît numărul tractoarelor pe care le-a avut întreprinderea în același an?

Concursul de matematică, cl. VII. Ploiești, 1966.

10.48. Să se afle cîte grame trebuie luate dintr-un aliaj cu titlul de 0,920 și cîte dintr-un aliaj cu titlul de 0,860 pentru a obține un aliaj de 300 grame cu titlul de 0,900.

10.49. O bibliotecă posedă 29 000 volume de literatură tehnică, politică și beletristică. Numărul volumelor de literatură politică este egal cu cel al cărților de beletristică, iar totalul volumelor de literatură tehnică reprezintă 90% din cărțile politice. Cîte volume din fiecare gen are biblioteca?

G.M.B., 1963, pag. 432

10.50. Un litru de spirt împreună cu sticla costă 51,75 lei, iar 1/2 litru spirt cu sticla sa costă 26,25 lei. Prețul a două sticle de 1/2 litru este cu 3/7 mai mult decît prețul unei sticle de un litru. Cît costă spirtul, sticla de 1 litru și cea de 1/2 litru?

10.51. De pe straturile cu ardei din parcela de legume a unei școli s-au obținut 91 kg ardei. Să se calculeze cantitățile respective, știind că 1/3 din cantitatea de gogoșari este egală cu 1/2 din cea de ardei grași și cu 2/3 din cea de ardei lungi.

G.M.B., 1960, pag. 493

10.52. Într-o grădină zoologică se află 37 animale cu 86 picioare și 44 limbi. Știind că vulpile și tigrii la un loc sînt cît cangurii la număr, iar tigrii și urangutanii împreună sînt cît șerpii la număr, să se afle: cîți canguri și urangutani care stau în cîte 2 picioare fiecare, șerpi care au cîte două limbi fiecare și cîți tigri se află în grădina zoologică.

G.M.B., 1959, pag. 534

10.53. În clasele a V-a A și a V-a B ale aceleiași școli au fost în total 64 elevi. Trecînd 3 elevi din prima clasă în cealaltă, rămîne în prima clasă un efectiv cu 2 elevi în plus față de a doua. Cîți elevi au fost la început în fiecare clasă?

Scanned with OKEN Scanner

10.54. Cîți litri de apă la temperatura de 12°C și cîți litri de apă la temperatura de 96° trebuie să se amestece pentru a obține 200 litri apă la 37,2°C?

10.55. Ce cantități de apă rece la temperatura de 4° și apă fierbinte cu temperatura de 70° trebuie, pentru ca amestecate să obținem 250 kg apă cu temperatura de 38°?

10.56. Un pionier vrea să depună la C.E.C. o sumă de bani pentru a-și cumpăra un aparat de radio cu tranzistori. Lunar a depus aceeași sumă și a constatat că după 4 luni nu-i ajung 350 lei, iar după un an i-ar rămîne 210 lei. Cît a depus lunar și cît costă aparatul de radio?

G.M.B., 1970, pag. 543

10.57. O fermă agricolă a planificat să obțină o recoltă de porumb de 3 800 kg la hectar și a obținut 4 620 kg. Dintr-un kg de porumb se pot obține 1,16 unități nutritive iar din 3,6 unități nutritive se obține 1 kg carne de porc. Să se afle:

a) Cu cît la sută a depășit producția la ha.

b) Cîte kg carne porc s-ar putea obține din recolta de porumb planificată și cît din cea realizată pe un hectar de teren.

c) Cît la sută reprezintă carnea din producția planificată față de carnea din producția realizată.

Concursul de matematică, cl. VII, Bacău 1966

10.58. Pentru săparea unui șanț, 25 muncitori au săpat în 15 zile lucrînd cîte 5 ore pe zi, $\frac{3}{11}$ din lungimea șanțului. Cîți muncitori mai trebuie angajați pentru ca ei lucrînd împreună cu cei 25 numai $6\frac{1}{4}$ ore pe zi, să poată termina partea rămasă în 20 zile?

Concursul de matematici, cl. VII, Hunedoara, 1966

10.59. Se dă expresia

$$E(x) = \left(\frac{\frac{x^2-1}{x+1}}{x+1} + \frac{x+1}{\frac{x^2-1}{x+1}}\right) \cdot \left(\frac{2x^3+2x}{4x^2} + 1\right) \cdot \frac{2x}{2x^2+2}$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valoarea ei numerică pentru $x = -\frac{2}{3}$.

c) Pentru ce valori ale lui x expresia dată inițial nu are sens.

Concursul de matematică, cl. VIII, Ploiești 1966

10.60. Să se arate că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare, avem:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) < 3 + \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.61. Să se arate că dacă x este diferit de 0,1 și -1 avem:

$$\frac{1-ax}{a-\frac{1}{x}}+\frac{1+b(1+x)}{b+\frac{1}{1+x}}=1,$$

$$\frac{1+b(1+x)}{b+\frac{1}{1+x}}-\frac{1-b(1-x)}{b-\frac{1}{1-x}}=2.$$

10.62. Să se arate că dacă $x(1+y)=y(1+z)=z(1+x)$ sau dacă $x(1-y)=y(1-z)=z(1-x)$, avem:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+24xyz.$$

10.63. Să se rezolve ecuațiile:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{ax}}+\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{a}{x}}=a;\quad \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{ax}}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{x}{a}}=x.$$

10.64. Se dă expresia

$$E=\frac{\left(1-\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}\right)\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\frac{a+b}{2}}{\left(1+\frac{3b-a}{a+b}\right)(a^2-b^2)}$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei obținute pentru $a=1$ și $b=-3$.

Concursul de matematică, cl. VIII, Deva 1966

10.65. Trei pionieri au depus fiecare cîte o sumă oarecare de bani la C.E.C. Primul pionier a depus cu 20 lei mai puțin decît 2/3 din cît a depus al doilea pionier, iar al doilea a depus cu 1/5 mai puțin decît a depus al treilea. Să se afle cît a depus fiecare, știind că împreună au depus 330 lei.

G.M.B. 1970, pag. 544

10.66. O uzină metalurgică livrează zilnic două tipuri de piese turnate din fier și cupru. Cantitatea necesară pentru turnarea a 100 piese este: pentru piesele de primul tip 2 tone fier și 1 tonă cupru; pentru piesele de tipul al doilea, 1 tonă fier și 2 tone cupru. Știind că se folosesc zilnic 8 tone fier și 9 tone cupru, se întreabă cîte piese trebuie turnate din fiecare tip, pentru a se realiza necesarul maxim de piese turnate zilnic?

G.M.B. 1964, pag. 125

10.67. Să se determine cifra x astfel ca numărul $\overline{38x54}$ să dividă prin 31.

G.M.B. 1964, pag. 358

10.68. În anul 1965, cooperatorii agricoli din comuna Brădeanu, județul Buzău au obținut, de pe cele 656 ha cultivate cu porumb, o producție medie de 3 100 kg porumb boabe la ha. La realizarea acestei producții au contribuit și arăturile

Scanned with OKEN Scanner

de toamnă. De pe 120 ha care au fost arate în primăvară, s-a obținut o producție medie cu 820 kg porumb boabe la ha mai mică decît aceea obținută de pe terenul arat în toamnă. Care sînt producțiile medii la hectar obținute pe cele două terenuri? Să se exprime în procente creșterea producției la hectar obținută de pe terenul arat, în toamnă față de cea obținută pe terenul arat primăvara.

10.69. Cooperativele agricole de producție din Negru-Vodă au recoltat, în anul 1965, de pe 57 910 ha cultivate cu grîu și porumb 148 282,6 tone cereale.

Știind că suprafața cultivată cu grîu a întrecut cu 1 238 ha pe cea cultivată cu porumb, iar producția de pe 38 ha cultivate cu porumb a echivalat în producție cu cea de pe 65 ha cultivate cu grîu, să se afle producția medie de grîu și de porumb boabe la ha.

Știind că, în anul 1964, s-a produs 59 372 tone de porumb boabe și că suprafața cultivată cu porumb a fost cu 4 936 ha mai mică decît cea din anul 1965, să se afle mărimea producției medii de porumb boabe la 1 ha, de la un an la altul.

10.70. Temeinica pregătire a absolvenților unei școli profesionale de pe lîngă o întreprindere este reflectată în datele de mai jos.

Șapte optimi dintre absolvenții școlii, care au fost repartizați întreprinderii respective, sînt fruntași în producție și inovatori. Numărul fruntașilor în producție întrece pe cel al inovatorilor cu jumătate din numărul total de absolvenți care lucrează în întreprinderea respectivă, iar inovatori sînt cu 2 mai puțin decît $\frac{1}{5}$ din numărul de absolvenți din întreprindere.

Să se afle cîți dintre absolvenții școlii profesionale lucrează în întreprindere, cîți sînt fruntași în producție și cîți inovatori.

10.71. Colectivul unei fabrici de cherestea și lăzi, antrenat în întrecerea socialistă, a produs în primul semestru al anului 1965, peste plan, 2 778 m^3 cherestea și lemn rotund. Știind că depășirea la lemn rotund este cu 99 m^3 mai mică decît dublul celei de la cherestea, se cere să se afle depășirile la fiecare sortiment.

10.72. La o fabrică de ciment s-a produs în primul semestru al anului 1965, peste plan, 19 636 tone ciment și clincher. Știind că depășirea medie lunară a planului de producție la clincher este cu 596 tone mai mică decît întreaga depășire semestrială la ciment, să se afle care au fost depășirile la ciment și clincher.

10.73. În semestrul II al anului 1965, constructorii orașului „Gheorghe Gheorghiu-Dej" au dat în folosință cu 154 apartamente mai mult decît în primul semestru al aceluiași an. Știind că $\frac{1}{8}$ din numărul apartamentelor date în folosință în semestrul II întrece cu 2 șesimea numărului de apartamente date în folosință în primul semestru, se cere să se afle cîte apartamente au fost date în folosință, în anul 1965, în orașul „Gheorghe Gheorgiu-Dej".

10.74. În anul școlar 1965—1966 prin grija statului nostru, au fost difuzate gratuit un număr de 22 milioane de manuale școlare elevilor din clasele I—XI.

Scanned with OKEN Scanner

Dintre acestea, s-au distribuit elevilor din clasele I—VIII un număr de manuale, care întrece cu 4,4 milioane întreitul numărului de manuale ce s-au difuzat elevilor din clasele IX—XI.

Cîte manuale s-au distribuit elevilor din clasele I—VIII şi cît reprezintă procentual acest număr?

10.75. În anul 1965, un grup de întreprinderi agricole au obţinut de pe 7 294 ha cultivate cu grîu şi 8 871 ha cultivate cu porumb o producţie totală de 40 565 225 kg. Să se afle producţiile medii obţinute la grîu şi porumb ştiind că producţia medie de porumb la hectar este cu 225 kg mai mică decît dublul celei de grîu.

10.76. Un număr de două cifre este cu 27 mai mic decît răsturnatul lui. Să se determine acest număr ştiind că raportul dintre el şi răsturnatul lui este egal cu $\frac{4}{7}$.

10.77. Să se determine un număr de două cifre, ştiind că suma dintre acest număr şi răsturnatul lui este 88, iar diferenţa dintre el şi răsturnatul lui este 18.

10.78. Să se afle un număr astfel ca întreitul său, micşorat cu trei sferturi ale lui, să dea cît dublul său mărit cu 17.

10.79. Un părinte are 39 ani, iar fiul său 11 ani. Peste cîţi ani vîrsta tatălui va fi triplul vîrstei fiului? Dar dublul vîrstei lui?

10.80. Ce număr trebuie să scădem celor doi termeni ai fracţiei $\frac{3}{4}$, pentru ca valoarea ei să se dubleze? Dar pentru ca valoarea ei să se înjumătăţească?

10.81. Jumătatea unui număr, micşorată cu sfertul aceluiaşi număr, dă cu 24 mai mult decît treimea sa micşorată cu o şesime din el. Care este acel număr?

10.82. La ce oră ne găsim cînd se ştie că a mai rămas din zi $\frac{3}{5}$ din cît a trecut. (Ziua se consideră că începe la 0 şi se termină la ora 24.)

10.83. În lunca inundabilă a Dunării s-au făcut vaste lucrări de îndiguiri, desecări şi defrişări, menite să pună în valoare mari suprafeţe de teren. Ştiind că pentru digul de la Călăraţi-Rîul s-au făcut terasamente de 2 ori mai mari ca volum, decît cele pentru digul din incinta Boianu-Sticleanu, iar pentru cel din incinta Borcea-de-Sus — Borcea-de-Jos cu 60 000 m³ mai mult decît pentru primele două diguri luate împreună, să se afle volumul terasamentelor executate pentru fiecare dig în parte, dacă în total s-au făcut terasamente de 9,06 milioane m³.

10.84. La o fermă agricolă, pentru strînsul recoltei într-un anumit timp, sînt planificate să lucreze 6 combine. După 2 zile de la începutul recoltării, celor 6 combine li se mai adaugă încă 3 combine de acelaşi fel. Lucrînd împreună, cele

Scanned with OKEN Scanner

9 combine termină recoltatul după alte 2 zile. În cît timp fusese planificată strîngerea recoltei?

10.85. Un tractorist urma să execute aratul unei tarlale, conform planului, în 7 zile, rămînîndu-i de arat pentru a opta zi încă 2 ha. Depăşind norma cu cîte 2 ha pe zi, el a reuşit ca în primele 3 zile să are jumătate din suprafaţa tarlalei. Cît trebuia să are zilnic conform planului?

10.86. Într-o cooperativă agricolă de producţie, la recoltatul porumbului au lucrat mai multe brigăzi de cooperatori. Prima brigadă a recoltat porumbul de pe 2 ha şi de pe încă $\frac{1}{8}$ din restul suprafeţei; brigada a doua a strîns recolta de pe 4 ha şi de pe $\frac{1}{8}$ din noul rest; cea de-a treia brigadă a recoltat de pe 6 ha şi $\frac{1}{8}$ din noul rest de suprafaţă ş.a.m.d.

Să se afle ce suprafaţă a fost cultivată cu porumb şi cîte brigăzi de cooperatori au lucrat la recoltat, ştiind că toate brigăzile au recoltat porumbul de pe suprafeţe egale.

10.87. La aratul uneia dintre tarlalele unei ferme agricole au lucrat un număr de tractorişti. Primul tractorist a arat 15 ha şi $\frac{1}{5}$ din restul tarlalei, al doilea 30 ha şi $\frac{1}{5}$ din noul rest, al treilea 45 ha şi $\frac{1}{5}$ din noul rest ş.a.m.d.

Să se afle suprafaţa tarlalei şi numărul tractoriştilor care au lucrat la aratul ei, ştiind că toţi au arat suprafeţe egale.

Capitolul XI

11.1. Într-o împărţire cîtul a fost 31 şi restul 11. Deîmpărţitul plus împărţitorul fac 555. Să se reconstituie împărţirea.

11.2. Să se arate că:

$$1 + ab + (a - b)^2 + ab(1 + ab) = (1 + a^2)(1 + b^2);$$

$$\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{ab(1 + ab)} = \frac{1}{b(a - b)} + \frac{1}{a(b - a)}.$$

11.3. Să se demonstreze că suma pătratelor a cinci numere consecutive este multiplu de cinci.

G.M.B., 1960, pag. 115

11.4. Un biciclist pleacă dintr-o comună pe o şosea. În momentul cînd a parcurs distanţa de 8,1 km, pleacă din aceeaşi comună o maşină cu viteza de

Scanned with OKEN Scanner

zece ori mai mare ca a biciclistului. Să se afle la ce distanţă de comună a fost ajuns biciclistul.

11.5. Să se demonstreze că dacă $a \leqslant b$ şi $c \geqslant d$, avem:

$$[\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(c-d)^2}]^2 = (a-b-c+d)^2;$$
$$[\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{(c-d^2)}]^2 = (a-b+c-d)^2.$$

11.6. Se dă fracţia algebrică

$$F(x, y) = \frac{x^5 - x^4y + 2x^3y^2 - 2x^2y^3 + xy^4 - y^5}{4(x^3y^2 - x^2y^3)}$$

a) Să se simplifice fracţia $F(x, y)$.
b) Să se scrie diferenţa $F(x, y) - 1$ sub forma unei puteri cu exponentul 2.
c) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei

$$\sqrt{F(x, y) - 1} \text{ pentru } x = 0{,}1 \text{ şi } y = 0{,}01.$$

Concursul de matematică cl. VIII, 1966

11.7. Se consideră fracţia

$$F(a, b) = \frac{(a-b)(a+b)^3 + b(a+b)^3}{b^3 - 3b^2(b-a) + 3b(b-a)^2 - (b-a)^3}$$

a) Să se aducă fracţia la forma cea mai simplă.
b) Să se rezolve ecuaţia

$$F(a, b) \cdot x - \frac{(b^2 - a^2)^2}{(a-b)^2} = 0,$$

unde $F(a, b)$ este forma cea mai simplă a fracţiei date.

Concursul de matematică, clasa VIII, Oltenia, 1966

11.8. Să se aducă la forma cea mai simplă fracţia:

$$\frac{(a-b)^3 + 3(a-b)^2b + 3(a-b)b^2 + b^3}{(a+b)^3 - 3(a+b)^2a + 3(a+b)a^2 - a^3}.$$

11.9. S-au cumpărat 5 găini, 3 curci şi 2 curcani cu 436 lei. Preţul unei găini este cu 2 lei mai mult decît 1/3 din preţul unei curci, iar preţul unei curci este cu 3 lei mai puţin decît 3/4 din preţul unui curcan. Care este preţul fiecărei păsări? Verificare.

G.M.B., 1961, pag. 499

11.10. Să se arate că dacă între laturile unui triunghi există reaţiile $2b = a + c$ şi $b^2 = ac$, atunci avem $a = c$.

G.M.B., 1957, pag. 51

11.11. Să se arate că dacă $a \neq -1$, şi notăm

$$\frac{1+a}{1+\frac{1}{a}} = A; 1 + \frac{1}{A} = B; 1 + \frac{1+A}{B} = \frac{1}{C};$$

$$1 + \frac{B}{1+A} = \frac{1}{D}, \text{ atunci } C + D = BD = ABC = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

11.12. Dacă $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$ și

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

să se arate că avem:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

11.13. Alege un număr oarecare, scrie la dreapta lui cifra 7, scade din numărul astfel obținut de 9 ori numărul ales la început și scrie cît a ieșit. Eu scad numărul 7 din acest număr și îți spun ce număr ți-ai ales. Cum se explică?

11.14. Dacă $a + b + c = abc$, să se arate că:

$$3 + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = ab + bc + ca.$$

11.15. O persoană face cumpărături dintr-un magazin de o treime din suma ce o avea, plus 90 lei. La alt magazin mai cheltuiește o treime din ce-i rămăsese și încă 60 lei; iar în al treilea magazin cheltuiește o treime din noul rest și încă 20 lei, rămînîndu-i 20 lei necheltuiți. Cît a cheltuit în fiecare magazin? Verificare.

11.16. Să se arate că expresiile:

$$E_1 = \frac{a-1}{a+1}\left(a - \frac{1}{a}\right)a \text{ și } E_2 = \left(a + 2 + \frac{1}{a}\right)\left(a - 2 + \frac{1}{a}\right)$$

sînt pătrate perfecte.

11.17. Ca urmare a trei reduceri consecutive de cost al unui aparat de radio a scăzut de la 2 000 lei la 1 500 lei. Să se calculeze care a fost ritmul mediu de reducere al prețului de cost, procentul de reducere rămînînd constant.

G.M.B., 1963, pag. 364

11.18. Să se rezolve ecuația.

$$\frac{b+x}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{x+b}{a+b} = \frac{x-b}{a-b} - \frac{2x}{a} - \frac{x-b}{b^2 - a^2}$$

și să se verifice soluția găsită.

Concursul de matematică, cl. VIII, Deva 1966

11.19. Doi bicicliști pleacă din două localități A și B în același timp și se deplasează unul în întîlnirea celuilalt. Primul sosind în B se întoarce imediat și merge spre A, al doilea sosind în A se întoarce imediat și merge spre B. Prima oară bicicliștii s-au întîlnit la 5 km de localitatea A, a doua oară la 3 km de B. Să se găsească distanța de la A la B.

11.20. O fermă agricolă a însămînțat o suprafață de 1 180 ha cu grîu, porumb, secară, orz și ovăz. Grîu a însămînțat de 4 ori mai mult ca porumb, iar porumb de 2,5 ori mai mult ca secară. Fiind însămînțată secară de 3,2 ori mai mult ca orz, iar orz de 3 ori mai puțin ca ovăz, să se determine suprafețele însămînțate cu fiecare cereală în parte.

G.M.B., 1958, pag. 477

Scanned with OKEN Scanner

11.21. Un mobil străbate un drum astfel: 1/3 din drum cu viteza constantă de 36 km/h, 1/4 din drum cu viteza de 45 km/h, iar restul cu viteza de 18 km/h. Cu ce viteză constantă ar trebui să se deplaseze mobilul pe întreg drumul, ca să-l străbată în același interval de timp?

G.M.B., 1963, pag. 249

11.22. Din relația:

$$\left[(x-3)+\frac{2}{\sqrt{3}}(z+2)\right]\cdot\left[(x-3)-\frac{2}{\sqrt{3}}(z+2)\right]=\left(1+y\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}z+\right.$$
$$\left.+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\left(1-y\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}z-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right),$$

să se deducă relația:

$$(x-3)^2+3\left(y+\frac{2}{3}z+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}(z+2)^2=1,$$

precum și relația:

$$x^2+3y^2+4yz-6x+8y+8=0.$$

11.23. La sfîrșitul anului 1962, numărul tractoarelor, semănătoarelor și combinelor din agricultura țării noastre era de 137 500 bucăți.

Știind că numărul tractoarelor era cu 3900 mai mare decît cel al semănătoarelor, iar cel al combinelor cu 24 200 mai mic decît al semănătoarelor, să se calculeze cîte erau de fiecare fel.

G.M.B., 1964, pag. 139

11.24. Să se arate că dacă:

$x+y+z=a$ și $x^2+y^2+z^2=a^2$, avem relația:

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{yz}{y+z}+a=0.$$

G.M.B., 1958, pag. 537

11.25. Patru copii au următoarele sume de bani: primul 41 lei, al doilea 32 lei, al treilea 25 lei și al patrulea 14 lei. Tatăl lor le dă 160 lei pentru ca să-i împartă astfel încît adunînd partea ce o va lua fiecare cu suma pe care a avut-o înainte să obțină: primul cu 12 lei mai mult decît al doilea, al doilea cu 12 lei mai mult decît al treilea și al treilea cu 12 lei mai mult decît al patrulea. Cît a primit fiecare din cei 160 lei?

11.26. Raportul a două numere este 0,(846953). Dacă scădem 3/5 ale primului număr din 3/4 ale numărului al doilea obținem $3\frac{3}{20}$. Care este diferența celor două numere?

G.M.B., 1960, pag. 114

11.27. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\frac{1-x}{1+z}=\frac{a}{b};\frac{1-y}{1-x}=\frac{b}{c};\frac{1-z}{1+y}=\frac{c}{a}.$$

G.M.B., 1959, pag. 495

Scanned with OKEN Scanner

11.28. Perimetrul unui paralelogram este 90 cm. Raportul înălțimilor lui este 3/5. Să se calculeze lungimile laturilor.

G.M.B., 1963, pag. 433

11.29. Pentru săparea unor galerii la o mină de cupru lucrează două echipe de mineri, una formată din 15 mineri, iar cea de-a doua din 11 mineri. Lucrînd cîte 8 ore pe zi, prima echipă a săpat în 5 zile 148 m³ de minereu. În cîte zile cea de-a doua echipă, lucrînd cu unelte mecanizate, va săpa 759 m³ de minereu dacă lucrează 7 ore pe zi, știind că greutatea muncii la prima echipă față de greutatea muncii la a doua echipă se raportează ca 5 : 2, iar productivitatea muncii echipei a doua se raportă la productivitatea muncii echipei întîi ca 17 : 7.

G.M.B., 1961, pag. 626

11.30. Împărțind un număr la 72 s-a obținut ca rest 68. Dacă același număr se împarte la 24, care va fi noul rest?

11.31. O cooperativă agricolă de producție are un teren în formă de dreptunghi cu lungimea de 30 hm, iar raportul dintre lățime și lungime este de 5/12. Acest teren se împarte pentru arat, între 3 brigăzi de tractoare, în 3 loturi ale căror arii sînt direct proporționale cu numărul de tractoare al fiecărei brigăzi. Brigada întîi are 7 tractoare, a doua are 5, iar a treia 4 tractoare. Fiecare tractor avînd 90 CP trage un plug cu 4 brazde, o brazdă avînd lățimea de 30 cm, iar viteza la arat de 1,2 m/s. Se cere: *a*) aria întregului teren și a fiecărui lot, *b)* timpul cît durează aratul propriu-zis.

11.32. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x-13}{2x+1}-\frac{2x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-13}=-1.$$

Să se verifice apoi soluția găsită.

G.M.B., 1958, pag. 614

11.33. Dacă introducem o bucată dintr-un aliaj de aluminiu în apă, rămîne necufundat 10 cm³, din volumul său. Introducînd aceeași bucată într-un amestec de 8 părți petrol de densitate 0,8 cu 2 părți apă, rămîne necufundat numai 5 cm³ din volumul său. Care este densitatea, volumul și masa bucății de aliaj?

G.M.B., 1958, pag. 723

11.34. Lungimea unui dreptunghi este de 3 ori mai mare decît lățimea sa. Dacă mărim lungimea sa cu 4 cm și lățimea cu 6 cm, aria crește cu 108 cm. Se cer dimensiunile dreptunghiului.

11.35. Să se afle numerele n de trei cifre care în baza 11 se scriu $\overline{xoy}$, iar în baza 9 se scriu $\overline{yox}$.

G.M.B., 1963, pag. 395

11.36. Două combine A și B, lucrînd împreună, pot strînge întreaga recoltă de grîu de pe terenul unei cooperative agricole de producție în 12 zile. Însă combinele lucrează împreună timp de 10 zile, după care combina A pleacă în altă parte.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a termina de strîns întreaga recoltă, combina B mai lucrează încă 5 zile singură. Să se determine timpul în care fiecare combină în parte, ar fi putut strînge singură recolta de pe terenul respectiv.

G.M.B., 1958, pag. 478

11.37. Un muncitor a avut un salariu de bază de 1 700 lei pe lună, norma lui fiind de 805 piese. Depăşindu-şi norma a primit pentru fiecare 100 de piese 10% din salariul său de bază. Cît a cîştigat acest muncitor în luna martie dacă a făcut cu 25 piese mai mult decît în februarie, cînd a cîştigat 2 210 lei?

11.38. Dacă x este un număr întreg, să se demonstreze că fracţia $F = \frac{x+1}{2x+1}$ este o fracţie ireductibilă.

G.M.B., 1959, pag. 234

11.39. În producţia pieselor pentru maşini-unelte gradul de utilizare al materialului, adică raportul dintre masa piesei prelucrate şi masa materialului folosit este în medie 0,30 în cazul pieselor forjate liber şi apoi aşchiate, şi 0,45 este în cazul pieselor forjate în matriţă şi aşchiate. Ştiind că la o uzină constructoare de maşini-unelte 35% din masa producţiei de piese aşchiate din semifabricate forjate se execută în matriţă, să se calculeze cu cît la sută se va reduce consumul de metal pentru piesele forjate, dacă prin aplicarea unor măsuri tehnice procentul de piese forjate în matriţă va creşte la 60%.

G.M.B., 1963, pag. 742

11.40. Un elev a simplificat fracţia $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$, unde $\overline{ab}$ şi $\overline{bc}$ sînt numere de două cifre. Suprimînd de la numărător şi de la numitor cifra b a ajuns la un rezultat bun. Cum se poate aceasta? Cîte fracţii sînt la care această simplificare greşită duce la un rezultat bun? Să ţinem seama că fiecare cifră este diferită de zero şi cu litere diferite am notat cifre diferite.

G.M.B., 1964, pag. 22

11.41. Dacă unui dreptunghi îi mărim lungimea cu un metru şi îi micşorăm lăţimea cu 3 metri aria lui scade cu 58 m², iar dacă îi micşorăm lungimea cu doi metri şi îi mărim lăţimea cu un metru, aria lui descreşte cu 40 m². Să se afle laturile dreptunghiului.

11.42. Care este cel mai mic număr întreg cu care trebuie să sporim ambii termeni ai fracţiei 5/8 pentru ca fracţia obţinută să difere de unitate cu mai puţin de o miime? Verificare.

11.43. În timp ce un tren trece pe lîngă un observator imobil, un alt observator mobil face 6 paşi; iar cînd trenul traversează o gară lungă de 210 m, acelaşi observator face 20 paşi. Să se afle lungimea trenului.

11.44. Să se rezolve ecuaţia:

$$(x-4)^3 - (2x-1)^3 + (2x+1)^3 - (x+4)^3 = 42x$$

G.M.B., 1960, pag. 434

Scanned with OKEN Scanner

11.45. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y} = \dfrac{x}{y} - 2 \\ (x-y)^2 = 3 \end{cases}$$

G.M.B., 1969, pag. 448

11.46. Un țăran cooperator a primit avansul de 7 400 lei în bancnote de 100,25 și 5 lei. Să se afle cîte bancnote de fiecare fel a primit, știind că dacă ar fi primit cu cîte una mai mult, numărul celor de 5 lei devenea cît al celor primite de 100 lei, și numărul celor de 25 lei devenea cu 20 mai mic decît numărul celor de 5 lei și 100 lei luate împreună în situația a doua.

G.M.B. 1963, pag. 695

11.47. Se dau polinoamele:

$P_1(x,y) = 2x^3 - 2x^2y + xy^2 + 7y^3;$
$P_2(x,y) = 3x^3 - 6x^2y - 2xy^2 + 5y^3;$
$P_3(x,y) = 2x^3 - 3x^2y - 4xy^2 - 3y^3;$
$Q_1(x,y) = 2x^5 - 5x^4y + 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 4xy^4 + y^5;$
$Q_2(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2.$

a) Să se descompună în factori polinoamele:

$P(x,y) = P_1(x,y) - [P_2(x,y) - P_3(x,y)]$
$Q(x,y) = Q_1(x,y) : Q_2(x,y)$

b) Să se readucă la forma cea mai simplă expresia

$$E(x,y) = \frac{xy}{x+y} : \left[\frac{x^2}{P(x,y)} - \frac{2xy^2}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} + \frac{y^2}{Q(x,y)}\right].$$

c) Să se calculeze valoarea numerică a fracției

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \text{ pentru } x = -\frac{2}{3} \text{ și } y = -\frac{1}{2}.$$

Concursul de matematică, cl. VIII, Ploiești, 1966

11.48. Să se arate că dacă A, B, C, D, E sînt numere întregi astfel că expresiile:

$$E_1 = 1960A - 1961B + 1962C + 1963D + 1964E \text{ și}$$
$$E_2 = 1737A - 2407B + 1293C - 2855D + 849E$$

sînt multipli de 1965, atunci și expresia:

$$E = A + 2B + 3C + 4D + 5E$$

este un multiplu de 1965.

G.M.B., 1961, pag. 499

11.49. Să se afle numărul de patru cifre căruia scăzîndu-i suma cifrelor sale obținem un alt număr tot de patru cifre, iar acestuia adăugîndu-i suma cifrelor sale, obținem 1962.

G.M.B., 1962, pag. 371

Scanned with OKEN Scanner

11.50. La un teatru, locurile de stal *I* formează 7/60 din numărul total de locuri, locurile de stalul *II* formează 5/24; la stalul *III* sînt de 3 ori mai multe locuri decît diferența dintre numărul locurilor de stal *II* și *I*. Locurile de balcon formează 1/2 din numărul locurilor din staluri, iar la galerie sînt 96 de locuri. Cîte locuri are fiecare stal?

G.M.B., 1959, pag. 689

11.51. Dacă $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, să se arate că:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}}.$$

11.52. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$$

Discuție.

11.53. Dacă $y - mx = \sqrt{m^2a^2+b^2}$ și

$my + x = \sqrt{a^2+b^2m^2}$, atunci $x^2+y^2 = a^2+b^2$.

11.54. O cooperativă agricolă de producție își are terenul ei arabil împărțit în culturi astfel: aria cultivată cu porumb întrece cu 1/4 aria cultivată cu grîu; mazărea și floarea-soarelui ocupă fiecare cîte 1/5 din aria cultivată cu porumb, aria cultivată cu sfeclă de zahăr este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mică decît aria cultivată cu porumb, iar lucerna și trifoiul ocupă fiecare cîte 1/8 din aria cultivată cu grîu. Se cere aria întregului teren dacă se mai știe că aria cultivată cu mazăre întrece cu 75 ha aria cultivată cu lucernă.

11.55. Se dă relația $x + y = 1 + xy$. Să se arate că dacă una din necunoscute ar fi egală cu unitatea, cealaltă necunoscută poate lua orice valoarea finită.

11.56. Dacă $\frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$ să se arate că $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 1$.

11.57. Dacă între numerele a,b,x,y,m,n, diferite de zero avem relațiile $ax = by$ și $mx = ny$, să se arate că rezultă și relația $an = bm$.

11.58. Se dă $x = \frac{a-yz}{y+z}$ și $x + y + z = b$, se cere să se calculeze $x^2 + y^2 + z^2$, a și b fiind cunoscute.

11.59. Să se determine m din sistemul:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= m^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3, \end{aligned}$$

astfel ca produsul xyz să fie egal cu zero.

G.M.B., 1959, pag. 50

Scanned with OKEN Scanner

11.60. Să se determine două numere întregi și pozitive care se bucură de proprietatea că suma lor este egală cu produsul lor.

G.M.B., 1959, pag. 415

11.61. Să se rezolve ecuația:

$$(a + x)(b + x) = (1 + ax)(1 + bx),$$

a și b fiind numere oarecare.

11.62. Doi dulgheri execută lucrarea de 9 m³ șarpantă de acoperiș în 80 ore. Fiind neegal calificați, primul lucrează cu 4 ore în plus la 1 m³ șarpantă. Să se afle productivitatea fiecăruia pe oră.

G.M.B., 1961, pag. 750

11.63. Să se demonstreze că numărul

$$N = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1},$$

unde n este un întreg pozitiv, se divide cu 19.

G.M.B., 1960, pag. 254

11.64. O echipă de muncitori are de executat o lucrare. Dacă echipa ar avea cu 6 muncitori mai mult, lucrarea ar dura cu 7 zile mai puțin, iar dacă ar avea cu 2 muncitori mai puțin, lucrarea ar dura cu 7 zile mai mult. Câți muncitori avea echipa și cîte zile a durat lucrarea?

G.M.B., 1964, pag. 317

11.65. Doi bicicliști pleacă din București în același timp pe șoseaua București-Ploiești. Un biciclist are viteza 15 km/oră, iar celălalt viteza de 13 km/oră. Să se calculeze după cît timp punctul unde se află kilometrul 30 de la București, se găsește la mijlocul distanței dintre cei doi bicicliști și cît timp mai trece pînă ce biciclistul din urmă ajunge la kilometrul 30?

11.66. Pentru 20 kg fidea, 10 kg zahăr și 5 kg unt s-a plătit 400 lei. Cît costă un kilogram din fiecare produs dacă un kg de zahăr costă cît 2 kg fidea, iar un kg de unt cît 4 kg de zahăr?

11.67. Suma cifrelor unui număr de patru cifre este 23. Cifra miilor mărită cu cifra zecilor reprezintă două treimi din cifra sutelor. Dacă scădem cifra miilor din cifra sutelor obținem cifra unităților; scăzînd însă cifra zecilor găsim jumătatea cifrei unităților. Să se afle numărul.

G.M.B., 1958, pag. 679

11.68. Să se desfacă numărul 36 în două părți, așa fel că înmulțind pe prima cu 17 și pe a doua cu 9 și făcînd suma produselor să obținem ca rezultat 340.

11.69. O barcă cu motor a coborît pe un rîu distanța de 28 km și apoi s-a înapoiat după 7 ore. Care este viteza bărcii pe o apă stătătoare, știind că viteza rîului este de 3 km pe oră.

11.70. Cît costă un caiet, un creion și o peniță, dacă 5 penițe, 3 caiete și 4 creioane costă 7,25 lei; 3 penițe, 5 creioane și 4 caiete costă 8,95 lei; iar 4 penițe, 3 creioane și 5 caiete costă 7,80 lei.

G.M.B., 1962, pag. 127

Scanned with OKEN Scanner

11.71. Patru muncitori au lucrat într-o zi 250 piese. Primul a depășit norma cu 24 piese, al doilea a făcut cu 2 piese mai puțin decît norma, al treilea și al patrulea au depășit fiecare norma cu jumătate din ea. Care a fost norma, știind că ea a fost aceeași pentru fiecare din muncitori?

11.72. Cîți lei a cheltuit Nelu pe ciocolată, știind că el ar fi putut cumpăra cu o tabletă de ciocolată mai puțin, dacă fiecare tabletă ar fi costat cu 2 lei mai mult și cu două tablete de ciocolată mai mult, dacă fiecare tabletă ar fi costat cu un leu mai puțin.

Concursul la clasa a VIII-a, Timiș, 1968

11.73. Să se împartă numărul 105 în două părți, astfel ca 3/4 din prima parte adunată cu 2/3 din a doua parte să facă 75.

G.M.B., 1959, pag. 620

11.74. Două robinete curgînd împreună, umplu un bazin în 9 ore și 36 minute. Dacă ar curge separat, primul robinet ar umple același bazin în 8 ore mai puțin decît al doilea robinet. Să se afle timpul în care fiecare robinet umple bazinul.

G.M.B., 1960, pag. 49

11.75. Fie $A = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $B = axz + b(xz + yz) + cyt$ și $C = az^2 + 2bzt + ct^2$.

Să se arate că $AC - B^2 = (ac - b^2)(xt - yz)^2$.

11.76. Pentru a calcula viteza în km/oră a unui tren care mergea cu mișcarea uniformă, un elev a folosit ceasul și pietrele kilometrice situate de-a lungul căii ferate. În timpul opririi într-o stație, același elev a reușit să calculeze viteza unui tren care trecea prin stație fără oprire. Ambele trenuri sînt formate din același fel de vagoane. Indicați operațiile făcute.

11.77. Trei magazine alimentare au primit același număr de ouă. Pentru primul magazin s-au împachetat 325 ouă într-un coș, pentru al doilea cîte 350 ouă într-un coș, iar pentru al treilea cîte 400 ouă într-un coș. Ce număr total de ouă și cîte coșuri a primit fiecare magazin, știind că magazinele au primit numărul minim de ouă ce s-au putut trimite.

11.78. Un călător a parcurs un drum de 320 km în trei etape de cîte 5 ore. Prima etapă a parcurs-o pe jos, a doua etapă cu trenul și a treia etapă cu trăsura. Să se afle lungimea fiecărei etape, știind că viteza trenului a fost de 4 ori mai mare decît viteza trăsurii, iar pe jos a călătorit de trei ori mai mult decît cu trăsura.

G.M.B., 1963, pag. 180

11.79. Doi bicicliști pleacă în același timp din două localități depărtate între ele cu 45 km, unul spre celălalt. Știind că raportul vitezelor este 4/5 și că unul face cu 3 km pe oră mai mult decît celălalt, se cere: *a)* la ce depărtare de cele două localități se întîlnesc? *b)* după cît timp de la plecare se întîlnesc?

G.M.B., 1959, pag. 744

Scanned with OKEN Scanner

11.80. La o bibliotecă s-au distribuit la cititori în prima zi 4% din totalul cărților, a doua zi, după ce s-au mai introdus pe inventar un număr de 1 200 cărți noi, s-au mai distribuit cititorilor încă 5% din cărțile rămase în bibliotecă, împreună cu cele noi, iar a treia zi, după ce s-au trecut pe inventar încă 1 200 cărți, din cărțile rămase disponibile s-au trimis pe teren pentru cititori încă 10%. Cînd s-a făcut calculul s-a observat că biblioteca avea cu $\frac{121}{500}$ din cărțile avute la început mai mult. Cîte cărți a avut la început biblioteca?

G.M.B., 1963, pag. 564

11.81. În cadrul orelor de atelier un elev a lucrat șuruburi, iar altul piulițe în număr total de 45 bucăți și cu masa de 2 kg. Costul total este de 65 lei. Un șurub cîntărește 50 g și o piuliță 40 g. Cît costă o piuliță și cît costă un șurub, știind că 5 piulițe și 10 șuruburi costă 25 lei.

G.M.B., 1959, pag. 621

11.82. Un miner, mergînd cu bicicleta, urcă un drum cu viteza de 14 km pe oră; la înapoiere, coboară cu 24 km pe oră. Care este lungimea drumului, dacă durata coborîrii este cu 10 minute mai scurtă decît durata urcării.

G.M.B., 1961, pag. 625

11.83. Pentru acoperirea unei școli se aduce țiglă, efectuîndu-se patru drumuri. În primul și al doilea drum se aduc 7 200 bucăți de țiglă, în al treilea cu 20% mai mult ca la primul drum, iar în al patrulea drum cu 25% mai mult decît s-a adus în al doilea drum. Se mai știe că în al treilea și în al patrulea s-au adus 8 680 țigle. Să se afle cîte țigle s-au adus la fiecare drum.

11.84. Se dă:

$$A = 1 + \frac{2x}{3 + \frac{4x}{5}}; \quad B = 9 - \frac{4 - \frac{15}{x}}{2}$$

Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \left(\frac{A^2 + AB + B^2}{A + B} + \frac{A^2 - AB + B^2}{A - B}\right)\left(\frac{B}{A} - \frac{A}{B}\right).$$

11.85. Doi pionieri au pornit la ora 7 din două localități A și B, venind unul spre altul. Cel care pleacă din A merge cu 1 km pe oră mai mult decît celălalt și din această cauză el parcurge distanța în 4 ore, iar al doilea în 5 ore. După $1\frac{1}{5}$ ore de mers, el se oprește 3 minute și apoi își continuă drumul. La ce oră și ce distanță de A va întîlni el pe cel care a plecat din B?

G.M.B., 1959, pag. 622

11.86. Din Roșiorii-de-Vede pleacă spre Turnu-Măgurele în același timp, un camion și un motociclist. Motociclistul trece prin fața kilometrului 60 la o jumătate de oră în urma camionului. Motociclistul a făcut 1 oră și 1/4 de la kilometrul

Scanned with OKEN Scanner

60 pînă la Turnu-Măgurele şi a ajuns cu un sfert de oră în urma camionului. Să se afle distanţa Roşiorii-de-Vede — Turnu-Măgurele, viteza camionului şi a motociclistului, precum şi timpul în care au străbătut distanţa dintre cele două oraşe.

G.M.B., 1958, pag. 680

11.87. Un troleibuz pleacă cu un număr oarecare de persoane, taxatorul încasînd 10 lei. Presupunînd că la fiecare staţie se dau jos 3 persoane şi se urcă 4 şi că preţul biletului este acelaşi pentru tot traseul, să se calculeze cîte persoane au călătorit cu troleibuzul, ştiind că a sosit cu 28 persoane în centru, iar taxatorul a încasat 26 lei.

G.M.B., 1962, pag. 552

11.88. Într-o cooperativă agricolă de producţie s-au însămînţat în prima zi 4/15 din întreaga suprafaţă, în a doua zi 5/8 din rest, în a treia zi 7/9 din ceea ce a mai rămas; în a patra zi $\frac{4}{5}$ din noul rest, iar în a cincea zi $2\frac{1}{2}$ ha, terminînd astfel întreaga lucrare. Cîte hectare a însămînţat în fiecare zi?

11.89. Un strungar sporind viteza de aşchiere a fontei cu 1 690 m/min, timpul necesar pentru prelucrarea unei piese a scăzut de la 35 minute la 25 minute. Cu ce viteză de aşchiere rapidă lucrează strungarul?

11.90. Un corp omogen de formă cubică pluteşte în întregime în interiorul apei dintr-un vas. Muchia cubului este de 5 cm. Dizolvînd sare în apă, cubul se ridică în afara apei cu un cm din înălţimea lui (o faţă a cubului rămîne paralelă cu suprafaţa apei). Ce masă specifică are soluţia?

11.91. Pentru a transporta o cantitate de cărămidă s-a angajat un camion de 3 tone capacitate de încărcare care transportă toată cantitatea de cărămidă într-un anumit număr de drumuri. Dacă s-ar angaja un camion de 4 tone, atunci s-ar face cu 3 drumuri mai puţin şi ar rămîne loc la ultimul transport pentru o tonă de alte materiale. Să se afle cantitatea de cărămidă de transportat şi numărul de drumuri făcute de fiecare camion.

G.M.B., 1961, pag. 750

11.92. O brigadă de tractorişti trebuie să are un ogor în 20 de zile. Timp de 15 zile lucrează întreaga brigadă, fiecare tractorist depăşind norma cu 10% după care o parte din tractorişti sînt transportaţi la altă lucrare, iar cei 5 tractorişti rămîn şi termină, prin depăşire cu 40% norma zilnică, arînd 119 ha cît au mai rămas. Să se afle norma zilnică a fiecărui tractorist, numărul tractoriştilor din brigadă şi aria totală a ogorului.

G.M.B., 1961, pag. 118

11.93. În două bidoane se află petrol, în primul de două ori mai mult decît în al doilea. Cînd din primul s-au scos 15 litri şi din al doilea 10 litri, în primul a rămas de patru ori mai mult decît în al doilea. Cîţi litri de petrol au fost în fiecare bidon?

Scanned with OKEN Scanner

11.94. Patru numere au suma lor 396. Dacă la primul număr se adaugă 5, din al doilea se scade 5, al treilea se înmulțește cu 5, iar al patrulea se împarte cu 5, se obțin patru numere egale. Care sînt acele numere?

Clasa VII, Olimpiada, 1961

11.95. La un centru de distribuirea laptelui sînt bidoane de două mărimi, cel mare fiind dublul celui mic. Dacă din primul s-ar scoate 30 litri, iar din al doilea 20 litri, cel de-al doilea ar reprezenta $33\frac{1}{3}\%$ din primul. Care este capacitatea fiecărui bidon?

G.M.B., 1959, pag. 694

11.96. Un magazin a vîndut în prima zi 3/8 din lungimea unei bucăți de pînză, a doua zi 2/3 din ceea ce a rămas, iar a treia zi restul. Să se afle cîți metri de pînză a vîndut magazinul în fiecare zi, știind că în prima zi a vîndut cu 24 m mai mult decît a vîndut a treia zi.

G.M.B., 1959, pag. 562

11.97. Pentru export s-au așezat 10 tone de mere de două calități în lădițe de 15 kg mere de calitatea întîi, și în lădițe de 10 kg mere de calitatea a doua, în total în 850 lădițe. Prețul total al merelor este de 49 000 lei; 3 kg din calitatea II valorînd cît 2 kg de calitatea I. Să se afle: *a)* cîte lădițe de fiecare fel au fost; *b)* ce cantitate de mere de fiecare fel a fost; *c)* costul unui kg de mere de fiecare fel.

11.98. Doi muncitori au executat o lucrare și au primit împreună 4 576 lei. Dacă primul muncitor ar lucra 2 zile. iar al doilea 5 zile, ar fi primit împreună 528 lei. Dacă numărul zilelor lucrate de primul muncitor ar fi de 2,5 ori cît numărul zilelor lucrate de cel de-al doilea, adică l-ar întrece cu 39 zile, atunci ar primi împreună 6 240 lei. Cît a primit fiecare? Cîte zile a lucrat fiecare?

G.M.B., 1958, pag. 418

11.99. O școală proiectează o excursie cu un număr de copii, pentru care trebuie autocare. Dacă în fiecare autocar ar încăpea cu 8 copii mai mult, ar trebui un autocar mai puțin; dacă în fiecare autocar ar fi cu 8 copii mai puțin decît locuri, ar mai trebui 2 autocare, din care unul ar avea 2/3 din locuri ocupate. Cîți copii pleacă în excursie și cîte autocare sînt necesare?

11.100. Distanța dintre două orașe A și B este de 50 km. Știind că un biciclist face 20 km în $2\frac{2}{5}$ ore și un altul $16\frac{1}{4}$ km timp de o oră și 18 minute, să se afle la ce distanță se află unul de celălalt după 54 minute în cazul cînd:

a) ambii pleacă deodată din A spre B;

b) unul pleacă din A și celălalt din B, primul spre celălalt?

c) în cazul precedent după cît timp se vor întîlni?

G.M.B., 1959, pag. 494

11.101. Cîțiva pionieri mergînd de-a lungul unei căi ferate rectilinii au văzut un tren venind spre ei și după ce au observat aburul deasupra locomotivei de la semnalul dat de mecanic, ei au auzit semnalul după 9 secunde.

Scanned with OKEN Scanner

Știind că pionierii mergeau cu un metru pe secundă și că ei au întîlnit locomotiva după 3 minute și 48 secunde de la observarea aburului, să se afle distanța la care se afla trenul cînd s-a dat semnalul și care a fost viteza trenului, dacă trenul a avut viteză constantă și viteza sunetului este de 341 m/s.

11.102. Un grup de pionieri fiind în excursie, trebuie să facă un drum de 20 km. Făcînd în medie pe oră un km mai mult decît era prevăzut, ei ajung la destinație cu o oră mai devreme. Cu ce viteză urmau să meargă pionierii?

11.103. Un număr de tractoare ară suprafața arabilă ce va fi cultivată cu sfeclă de zahăr astfel: primul tractor ară 2 ha și 1/12 din suprafața rămasă; al doilea tractor ară 4 ha și 1/12 din noua suprafață rămasă; al treilea ară 6 ha și 1/12 din suprafața rămasă și așa mai departe.

Știind că părțile arate de fiecare tractor sînt egale, să se afle cîte hectare s-au arat și cîte hectare a arat fiecare tractor?

G.M.B., 1960, pag. 687

11.104. Un tren avînd o întîrziere de 16 minute recîștigă acest timp pe o distanță de 80 km, mărindu-și viteza cu 10 km/oră. Se cere viteza cu care a mers trenul.

11.105. Vitezele pe jos, călare și cu bicicleta sînt direct proporționale cu numerele $2\frac{1}{2}$, 5 și 6.

a) Viteza pe jos fiind de 5 km/oră să se afle viteza călare și viteza cu bicicleta.

b) De la gară la un sat se poate ajunge cu bicicleta, cu 18 minute mai repede decît călare. Care este distanța de la gară pînă în sat?

Concursul de matematici, clasa VII, București, 1966

11.106. Dacă $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{c+a}$, $z = \frac{c}{a+b}$

Să se arate că $xy + yz + zx = 1 - 2xyz$

Concursul de matematică, cl. VIII, Tg. Mureș, 1966

11.107. Să se efectueze

$$\left(\frac{a^2-ab}{a^2b+b^3} - \frac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}\right) : \left(\frac{a}{ab-b^2} + \frac{b}{ab^2-2a^2b+a^3} : \frac{1}{b-a}\right)$$

Concursul de matematică, clasa VIII, 1966

11.108. *a)* Să se simplifice fracția

$$\frac{a^2c - b^2c + a^2d - b^2d}{ac + bc + ad + bd}$$

b) Să se afle valoarea numerică a fracției

$$\text{cînd } a = \sqrt{\frac{1{,}21}{4{,}84}};\ b = -1\frac{1}{2}.$$

Concursul de matematică, cl. VIII, Banat, 1966

11.109. Să se simplifice fracția

$$\frac{\left(\frac{x^2}{x^2-6x+9}-\frac{6x}{x^2-9}+\frac{9}{x^2+6x+9}\right)\cdot\frac{x^4+18x^2+81}{(x^2-9)^2}+8}{(x^4-3x^3+3x-1):(x^2-3x+1)}$$

Concursul de matematică, cl. VIII, Banat, 1966

11.110. Se dau expresiile:

$$A=\frac{\frac{2}{y}-\frac{5}{x}-\frac{x}{xy}}{4x^2-20xy+25y^2-9};\quad B=\frac{5-10y+4x}{2x^2y-5xy^2+3xy};\quad C=\frac{\frac{4x}{y}-\frac{9y}{x}}{4x^2+12xy+9y^2}.$$

a) Să se aducă A și B la forme mai simple.

b) Să se calculeze $(A+B):C$.

c) Să se afle valoarea numerică a expresiei $(A+B):C$ pentru $x=\frac{1}{4}$ și $y=-\frac{1}{2}$.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, Bacău, 1966

11.111. Să se considere expresia:

$$\frac{20x^2-45}{25x-16}\cdot\left(\frac{5x}{4x^2+12x+9}-\frac{8}{10x^2+15x}+\frac{24}{20x^3+60x^2+45x}\right):$$
$$:\left[\left(\frac{x+5}{2x-10}-\frac{x-5}{2x+10}-\frac{50}{25-x^2}\right)\cdot\frac{3x^2-15x}{40}\right].$$

a) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru $x=-2$.

b) Să se efectueze calculele pentru a aduce expresia la o formă mai simplă.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, Bacău, 1966

11.112. Se dau polinoamele:

$P_1(x)=x^3-4x-3x^2+12$; $P_2(x)=x^3-9x+2x^2-18$;
$P_3(x)=x^3-4x+3x^2-12$.

a) Să se descompună în factori și să se afle c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

b) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x)=(x+3)\cdot\frac{P_1(x)}{P_2(x)}+(x-2)\cdot\frac{P_2(x)}{P_3(x)}+(3-x)\cdot\frac{P_3(x)}{P_1(x)}.$$

c) Să se afle valoarea numerică a lui $E(x)$ știind că x este soluția ecuației:

$$1+\left(x-\frac{36x}{x+9}+9\right):\left(\frac{x}{x+9}-\frac{9}{9-x}-\frac{18x}{x^2-81}\right)=0$$

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1968, Iași

11.113. Se consideră fracția:

$$F(x,y)=\frac{(2x+3y)(3y+1)(1+2x)+6xy}{2x+3y+1}$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se calculeze valoarea fracției pentru $x=\frac{a-1}{2}$ și $y=\frac{a-1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Notînd cu $F(a)$ rezultatul înlocuirii lui x și y cu valorile de mai sus, să se afle valoarea lui a pentru care $\frac{F(a)}{a-1} = 0$, $(a \neq 1)$.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a 1969, Dolj

11.114. Se dă expresia:

$$E(x, y) = \left[\frac{2x - y}{2x + y} - \frac{2x + y}{2x - y} + \frac{2x - y - (2x + y)}{y + 2x - (y - 2x)}\right] : \frac{(2x - y)^3 + 3(2x - y)(y + 2x) + (2x + y)^2}{(4x^2 - y^2) \cdot [y + 2x - (y - 2x)]}.$$

a) Să se aducă expresia la o formă mai simplă.

b) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{a \cdot (E + 1)}{0{,}5 \cdot E - (a + 1)} = 1.$$

c) Să se discute soluția ecuației de la punctul *b)*.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1969, Iași

11.115. Se dă sistemul:

$$(a - 1)(a + 1)(x + y) = 2; \quad a(2x - y) + 2x + y = \frac{1}{a}, \text{ unde } a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

a) Să se rezolve sistemul, punînd soluțiile sub forma cea mai simplă.

b) Să se determine a pentru care x și y sînt simultan numere strict pozitive.

c) Să se determine valoarea parametrului a astfel ca x, y și $\frac{2}{a(a-1)}$ să fie laturile unui triunghi.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1970, Iași

11.116. Să se simplifice expresia:

$$\frac{x^6(x^2 + 10y^2) + y^6(y^2 + 10x^2) + 27x^4y^4}{(x^2 + y^2)^4 - 9x^4y^4}.$$

Fie $\frac{N_1(x,y)}{N_2(x,y)}$ expresia obținută.

a) Să se afle valoarea numerică a acestei expresii pentru $x = \sqrt{a}$, $(a > 0)$ și $y = -1$.

b) Să se rezolve ecuația în a:

$$\frac{N_1(\sqrt{a}, -1)}{N_2(\sqrt{a}, -1)} = -1.$$

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1970, Vaslui

11.117. *a)* Să se simplifice fracția:

$$E(x) = \frac{(2x - 3)^2 + 4x^2 - 4x - 15}{4x^2 + 4x + 1}.$$

b) Să se afle valorile lui x pentru care: $E(x) = 1$; $E(x) < 2$; $E(x) > 2$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze valoarea numerică a lui $E(x)$ pentru $x = -0{,}501$.

d) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia $E(x)$ ia valori întregi?

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1970, București

11.118. Fie expresia:

$$E(x, y) = \frac{3 \cdot \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3 - 3 \cdot \frac{x-y}{x+y} + 1}{3 \cdot \frac{x+y}{x-y} - 3 \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3 - 1}$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) În ce condiții expresia nu are sens?

c) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru:

$$x = 101;\ y = 99.$$

d) Dacă

$$x = \frac{1 - \frac{1+y}{1-y}}{1 + \frac{1+y}{1-y}}$$

la ce formă se poate aduce expresia de la punctul a)?

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1971, Galați

11.119. Se dau expresiile:

$$E_1(x) = \frac{(x+1)^2 + 2(x+1) + 1}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \text{ și } E_2(x) = \frac{8 - x^3}{-4x^2 - 8x - 16}.$$

a) Să se calculeze media geometrică sau proporțională (m_g) a acestor expresii.

b) Să se afle mulțimea numerelor reale x, pentru care media proporțională are sens.

c) Valoarea lui x dată de relația:

$$\frac{5\frac{2}{3} + \frac{1}{9}}{x} = \frac{2{,}1(6)}{\sqrt{0{,}5625}}$$

face parte din mulțimea valorilor admise ale mediei proporționale?

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1971, Mehedinți

11.120. Se dau expresiile:

$$E_1 = x^2 - 2ax \text{ și } E_2 = x^3 - 3ax^2 + 2a^2x.$$

a) Să se descompună în factori cele două expresii.

b) Să se stabilească în ce condiții fracția $F(x) = \frac{E_1}{E_2}$ poate fi simplificată și să se simplifice.

c) Să se afle $F(a + \sqrt{2})$ și să se determine unghiul ascuțit A al cărui $\sin A = F(a + \sqrt{2})$.

d) Să se afle valorile lui x astfel ca: $\frac{E_1 + E_2}{E_2} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

e) Să se precizeze ce condiţii se impun lui „a“ pentru ca: 1) ecuaţia dată să aibă soluţie; 2) soluţia să fie sau pozitivă sau negativă.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1971, Timiş

11.121. Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{7y - 5}{y + 4} \leqslant 3$$

şi apoi să se determine mulţimea numerelor întregi care o verifică.

11.122. Se dau mulţimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ şi $B = \{3, 4, 5\}$.

Să se indice perechile (x, y), unde $x \in A$ şi $y \in B$, astfel ca suma şi produsul elementelor respective să aparţină mulţimii B.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1971, Bucureşti

11.123. Se dau numerele întregi x, y, z astfel ca $x \in (-2,2)$, $y \in (-2,3)$ şi $z \in (-2,3)$. Să se indice cel puţin trei situaţii în care are loc relaţia $x + y + z = 0$.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, 1971, Iaşi

11.124. Să se determine numerele x, y, z, t ştiind că:
a) $\{1, 2\} \cup \{y, t\} = \{1, 2, 3\}$; *b)* $\{3, 4\} \cup \{x, y\} = \{2, 3, 4\}$; *c)* $\{z, t\} = \{1, 4\}$; *d)* $\{x, y, t\} = \{1, 2, 3\}$.

G.M.B., 1970, pag. 312

11.125. *Se dă mulţimea* $E = \{a, b, c, d\}$. *Să se determine elementele ei, în condiţiile:*
$\{a, b, 4\} \cap \{b, c, -2\} = \{b, -2\}$; $\{a, b, 1\} \subset E$;
$\{b, c, 6\} \subset E$; $\{b, c, d\} \cup \{a, 3\} = \{a, c, d, 3\}$

G.M.B., 1970, pag. 363

11.126. Să se determine mulţimile A şi B ştiind că:
$A \cup B = \{1, 2,3,4,5\}$; $A \cap B = \{3, 5\}$; $B - A = \{2,4\}$; $A - B = \{1\}$

11.127. Să se arate că dacă:

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,\ldots,100\};$$
$$A - B = \{1,3,5,7,\ldots 99\};$$
$$A - C = \{2,4,6,8,\ldots 100\}.$$

atunci $B \cap C = \varnothing$ şi $B \cup C = A$.

11.128. Să se determine mulţimile A şi B care îndeplinesc condiţiile: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cup B = \varnothing$; Oricare ar fi $x \in A$, există $y \in B$, astfel încît $x - y = 1$.

G.M.B., 1969, pag. 243

11.129. Se dau mulţimile:

$$A = \{x \mid x = 3n - 2,\ n \in N\};$$
$$B = \{x \mid x = 1003 - 2m,\ m \in N\};$$
$$C = \{x \mid x = 6p + 1,\ p \in Z,\ 0 \leqslant p \leqslant 166\}.$$

Să se demonstreze că $A \cap B = C$.

G.M.B., 1969, pag. 438

Scanned with OKEN Scanner

11.130. Să se găsească mulțimile A, B care îndeplinesc simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$; b) $A - B = \{1,4\}$; c) $A \cap B \not\subset \{3,4,5\}$;
d) Mulțimile A, B au același număr de elemente

G.M.B., 1969, pag. 439

11.131. Fie X, Y, Z, trei mulțimi ce satisfac următoarele condiții:

$$X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$
$$Y \cup Z = \{3, 4, 6\}.$$
$$\{1, 2, 5, 6\} \cap Z = \Phi.$$

Mulțimile X, Y, Z sînt disjuncte.
Să se determine mulțimile X, Y, Z.

G.M.B., 1970, pag. 221

11.132. Să se determine mulțimile A, B, C știind că următoarele condiții sînt îndeplinite simultan:

a) $1 \in A$; b) $\{2,4\} \cap B = \varnothing$; c) $3 \in A \cap B \cap C$; d) $4 \in A \cap C$; e) $A \cap B \not\subset C$; f) $B \cup C \not\subset A$; g) $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4\}$.

G.M.B., 1969, pag. 439

11.133. Să se găsească mulțimile A și B știind că următoarele condiții sînt satisfăcute simultan:

a) $A \cup B = \{1,2,,3,4,5\}$; b) $A \cap B = \{2,3\}$; c) $\{2,3,4,5\} \cap B \not\subset A$; d) $\{1,4\} \cap A \not\subset B$.

G.M.B., 1969, pag. 439

11.134. Din mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se consideră submulțimile:

$A = \{2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$ și $C = \{1, 2, 6\}$.
Fie $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ complementarele în E ale submulțimilor A, B, C respectiv.
a) Să se formeze: $A \cup B$; $A \cap C$; $(A \cap B) \cap C$; $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$.
b) Să se arate că $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ și
$C \cup (A \cap B) = (A \cup C \cap B \cup C)$.

Scanned with OKEN Scanner

Geometrie

Capitolul XII

12.1. Să se calculeze:

$90° - 37°49'53''$; $180° - 152°44'09''$;

$360° - 219°51''$.

12.2. Să se calculeze:

$$7 \cdot 23°17' + \frac{1}{2} \cdot 98°27'44'' - 6°51'47''.$$

12.3. Să se calculeze.

$$83°57'19'' - \frac{57°44' + 18°51'}{5}.$$

12.4. Să se calculeze în grade, minute și secunde unghiul:

$$\frac{180°}{3{,}1416}.$$

12.5. Să se calculeze raportul:

$$\frac{78°40'52''}{42°37'21''}.$$

12.6. Se dă unghiul $A = 127°47'20''$ exprimat în grade sexagesimale. Să se exprime unghiul A în grade centezimale, numite și grade noi, știind că $90° = 100$ grade centezimale, iar submultiplii unui grad centezimal sînt zecimi, sutimi și miimi de grad centezimal.

12.7. Un elev privind ceasornicul școlii observă că acele sînt așezate în prelungire, astfel că cel care arată orele este între 12 și 1. Cît este ora?

12.8. Un ceas arată ora 5. După cîte minute și secunde minutarul va ajunge acul care arată orele?

Scanned with OKEN Scanner

12.9. Un ceasornic arată ora 7 şi 25 minute. Să se calculeze unghiul ascuţit format de orar şi de minutar în grade, minute şi secunde sexagesimale.

12.10. Ce unghi ascuţit formează acele unui ceasornic cînd arată ora 2 şi 10 minute?

Capitolul XIII

13.1. Să se exprime mărimea unghiurilor formate de înălţimea AA', înălţimea BB' şi înălţimea CC' într-un triunghi ABC cu unghiurile cunoscute. Caz particular $\sphericalangle B = 64°29'$ şi $\sphericalangle C = 58°31''$.

13.2. Un triunghi ABC are unghiul $\hat{B} = 64°23'$. Bisectoarea acestui unghi se întîlneşte cu bisectoarea unghiului C în punctul I. Ştiind că unghiul $BIC = 126°9'$, să se afle unghiurile A şi C.

13.3. În triunghiul isoscel ABC, înălţimile BD şi CE care cad pe laturile egale ale triunghiului formează unghiul $BOC = \frac{17}{15}$ dr.

Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC.

13.4. În triunghiul ABC se duc înălţimile AA' şi BB' care fac cu latura AB, respectiv unghiurile $A_1 = 25°$ şi $B_1 = 50°$. Să se calculeze unghiurile triunghiului şi unul din unghiurile ascuţite pe care le fac cele două înălţimi.

13.5. Într-un triunghi ABC, unghiul BIC format de bisectoarele unghiurilor B şi C este de 135°. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

G.M.B., 1959, pag. 493

13.6. În triunghiul ABC, bisectoarele interioare din A şi C se intersectează în punctul M, iar cele exterioare în N. Să se calculeze unghiurile AMC şi ANC, dacă $A = 30°$ şi $C = 50°$.

13.7. Un triunghi are laturile a, $a + r$ şi $a + 2r$.

a) Dacă a este constant, care este valoarea cea mai mare posibilă a lui r.

b) Dacă r este constant să se determine valoarea cea mai mică a lui a.

G.M.B., 1963, pag. 564

13.8. În clasă, profesorul cere elevilor să taie din carton un triunghi isoscel, în care o latură să fie de 12 cm, iar alta de 25 cm. La început elevii se întreabă care este a treia latură, însă a doua zi se constată că toţi elevii au adus triunghiuri egale. Care este explicaţia că nu au fost două feluri de triunghiuri.

13.9. Fie un segment oarecare AB şi M mijlocul său. Să se demonstreze că oriunde ar fi aşezat un punct C avem inegalităţile:

Scanned with OKEN Scanner

$|AC - BC| \leqslant 2CM \leqslant AC + BC$ şi să se arate în care cazuri este valabil semnul egal.

Prin $|AC - BC|$ înţelegem valoarea pozitivă chiar dacă $AC < BC$.

13.10. Să se exprime mărimea unghiului format de două înălţimi ale unui triunghi oarecare ABC în funcţie de unghiurile triunghiului.

Se va considera că triunghiul are unghiurile ascuţite.

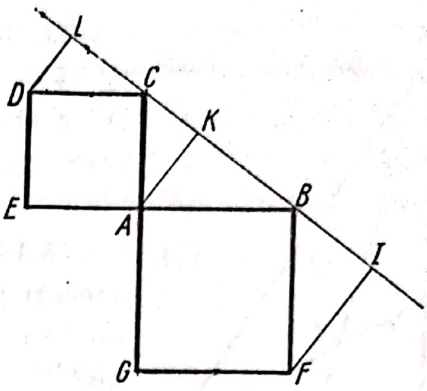


Fig. 13.13

13.11. În triunghiul oarecare ABC se duce bisectoarea AD, iar din punctul D ducem perpendicularele DM şi DN, respectiv pe AB şi AC. Să se demonstreze că triunghiul AMN este isoscel şi că AD este perpendiculară pe MN.

13.12. În triunghiul echilateral ABC, E fiind mijlocul lui AC, bisectoarea unghiului EBC întîlneşte perpendiculara în A pe AB în punctul D, iar latura BC o întîlneşte în punctul F. Să se arate că triunghiurile ABD, ADC şi AFC sînt isoscele.

G.M.B., 1960, pag. 620

13.13. Pe catetele AB şi AC ale triunghiului ABC se construiesc pătratele $ABFG$ şi $ACDE$. Să se demonstreze că suma distanţelor punctelor D şi F la dreapta BC este egală cu ipotenuza.

13.14. Cîte diagonale se pot duce unui poligon convex cu 12 laturi şi cîte unui poligon convex cu 100 laturi?

13.15. Într-un triunghi oarecare ABC cu latura AB mai mică decît AC ducem bisectoarea AD. Să se demonstreze că segmentul BD este mai mic decît distanţa de la vîrful C la aceeaşi dreaptă AD.

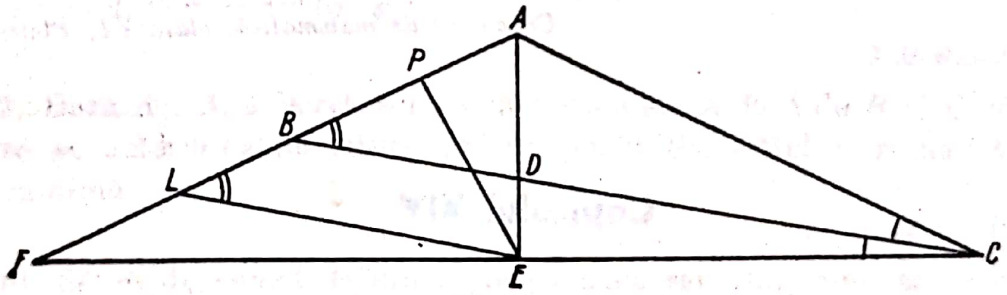


Fig. 13.15

13.16. Se dă un triunghi oarecare ABC şi se duce înălţimea AA'. Fie M, N, P, respectiv simetricele punctului A' faţă de mijloacele laturilor BC, CA, AB. Să se arate că patrulaterul $MNPA'$ este un trapez isoscel.

13.17. Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, perpendiculara în C pe BC întîlneşte pe AB în D, iar bisectoarea unghiului C taie latura AB în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B şi C se taie formînd un unghi de 45° şi că segmentele CD şi DE sînt egale.

Scanned with OKEN Scanner

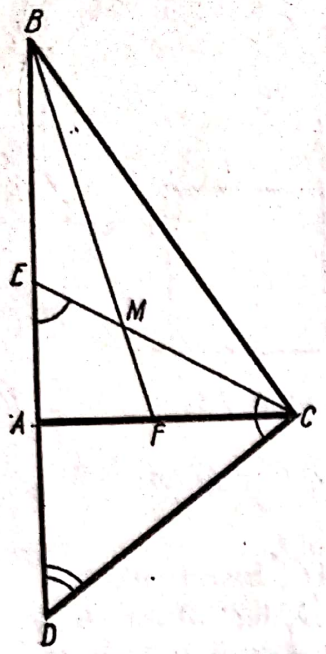


Fig. 13.17

13.18. Se dă triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$ şi $\sphericalangle A = 20°$. Pe AC se ia un punct M, iar pe AB un punct N, astfel că $\sphericalangle MBA = 20°$ şi $\sphericalangle NCA = 30°$. Să se calculeze $\sphericalangle NMB$.

G.M.B., 1963, pag. 728

13.19. Din punctul O situat pe dreapta AB se duc, de aceeaşi parte a dreptei, semidreptele OC şi OD care fac între ele un unghi drept precum şi bisectoarea OE a unghiului BOD.

a) Să se arate că unghiurile BOC şi DOA sînt complementare.

b) Dîndu-se măsura unghiului BOC de 14° să se calculeze unghiurile AOD, DOE, şi EOC.

Concursul de matematică, cl. VI, Banat, 1966

13.20. Pe latura OX a unui unghi XOY se iau două segmente OA şi OA', iar pe OY segmentele OB şi OB' egale respectiv cu OA şi OA'. Dreptele AB' şi $A'B$ se taie în I. Să se arate că

a) Triunghiurile OAB' şi OBA' sînt egale.

b) Triunghiurile $A'AI$ şi $BB'I$ sînt egale.

c) OI este bisectoarea unghiului XOY.

Concursul de matematică, clasa VI, Crişana, 1966

13.21. În triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ se duc înălţimile AD şi $A'D'$ şi medianele BE, $B'E'$. Să se demonstreze că aceste triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ sînt egale dacă:

a) $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ şi $AD = A'D'$.

b) $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ şi $BE = B'E'$.

Concursul de matematică, clasa VI, Ploieşti, 1966

Capitolul XIV

14.1. Unghiurile unui triunghi sînt proporţionale cu numerele 5, 6, 7. Să se calculeze unghiul format de înălţimea şi bisectoarea unghiului cel mare.

14.2. În dreptunghiul $ABCD$, bisectoarea unghiului B şi diagonala ce pleacă din acest vîrf fac între ele un unghi de 15°. Bisectoarea întîlneşte diagonala AC în P şi latura DC în E. Să se arate că triunghiurile COE şi POE sînt isoscele, O fiind intersecţia diagonalelor.

G.M.B., 1962, pag. 353

14.3. Se dă un triunghi ABC în care unghiul CAB este de 60°. Înălţimile BB' şi CC' se intersectează în H, iar bisectoarea unghiului CAB intersectează cele două

Scanned with OKEN Scanner

înălțimi BB' și CC' în O și E. Să se demonstreze că triunghiul OEH este echilateral.

14.4. Se dă un segment AB și O mijlocul său. Ridicăm în O și B perpendiculara pe AB, ambele de aceeași parte a lui AB. Luăm pe perpendiculara din O segmentul $OC = AB$, iar pe perpendiculara din B segmentul $BD = \frac{1}{2} AB$. Se cere:

a) cîte grade sexagesimale are unghiul CDB?

b) să se arate că BC și AD sînt perpendiculare.

G.M.B., 1959, pag. 744

14.5. Să se arate că în orice dreptunghi $ABCD$ distanța de la vîrful A la diagonala BD este egală cu distanța de la C la dreapta dusă prin B paralelă cu diagonala AC.

14.6. Diagonalele unui paralelogram $ABCD$ se taie în punctul O. Prin acest punct se duce o dreaptă care intersectează laturile opuse al paralelogramului AB și CD în M și N. Să se arate că $OM = ON$.

14.7. Într-un triunghi ABC se duce mediana AD. Se prelungește mediana cu segmentul $DE = AD$. Să se arate că triunghiurile ABD și CDE sînt egale și că patrulaterul $ABEC$ este paralelogram.

G.M.B., 1960, pag. 253

14.8. În triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor B și C se taie în D. Paralelele duse din B și C la aceste bisectoare întîlnesc prelungirile laturilor AB și AC în E, respectiv F. Se notează cu M intersecția lui CE cu BF.

a) Să se demonstreze că $BE = CF$.

b) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC și ale paralelogramului $BDCM$ în cazul cînd $\sphericalangle E = 19°16'$ și $\sphericalangle F = 39°14'$.

G.M.B., 1960, pag. 494

14.9. Dacă A_1, A_2 sînt respectiv simetricele lui A față de B și C în triunghiul ABC, să se determine pe latura BC un punct M, astfel ca suma $MA_1 + MA_2$ să fie minimă.

G.M.B., 1960, pag. 307

14.10. Să se dea cinci definiții ale paralelogramului, apoi să se mai arate și alte proprietăți într-un paralelogram, care nu au fost trecute în nici una din definițiile date.

14.11. Se dă un triunghi și două puncte în interiorul său. Cum se poate trece dintr-un punct la celălalt pe drumul cel mai scurt, trecînd prin două laturi ale triunghiului.

14.12. Două paralele sînt tăiate de o secantă în M și N. Bisectoarea unui unghi din M taie paralela din N în A, iar o paralelă oarecare la MA taie pe MN în B și pe AN în C. Dreptele AB și MC se taie în D. Să se demonstreze că dreptele DN și AM sînt perpendiculare.

Scanned with OKEN Scanner

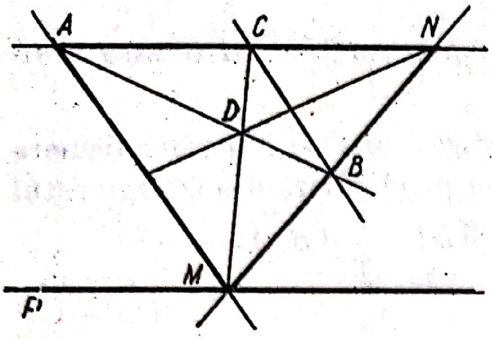


Fig. 14.12

14.13. Unghiurile unui patrulater oarecare $ABCD$ sînt proporţionale cu numerele 5, 7, 10, 14. Să se calculeze unghiurile ascuţite formate de intersecţiile bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, C, D ale patrulaterului luate două cîte două.

14.14. Să se demonstreze că suma unghiurilor alăturate bazei mari ale unui trapez este mai mică decît suma unghiurilor alăturate bazei mici.

14.15. Se dă paralelogramul $ABCD$ care are unul din unghiurile sale de $33°41'10''$.

a) Să se arate că bisectoarele a două unghiuri alăturate ale paralelogramului sînt perpendiculare.

b) Se prelungeşte latura AB cu lungimea $BE = BC$. Să se calculeze unghiurile triunghiului BCE.

G.M.B., 1959, pag. 562

14.16. Se dau două puncte fixe A şi B aşezate de aceeaşi parte a unei drepte (d). Să se găsească pe această dreaptă două puncte M şi N, ştiind că lungimea MN este a cm, astfel că $AM + MN + NP$ să aibă lungimea minimă.

14.17. Se dă un pătrat $ABCD$ cu latura egală cu a. Se prelungeşte BC cu $CC_1 = a$ şi DA cu $AA_1 = a$. Să se arate că patrulaterul A_1BC_1D este un paralelogram şi că triunghiul BDC_1 este dreptunghic.

14.18. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC. Să se demonstreze că simetricele lui M faţă de mijloacele laturilor BC, AC, AB sînt vîrfurile unui triunghi $A'B'C'$ egal cu triunghiul ABC.

G.M.B., 1963, pag. 269

14.19. O dreaptă oarecare taie laturile AB, BC, CD, DA ale pătratului $ABCD$, respectiv în punctele K, L, M, N, iar diagonala BD în punctul O. Perpendiculara dusă pe această dreaptă MN taie laturile pătratului în aceeaşi ordine, respectiv în punctele P, R, S, K. Să se demonstreze că patrulaterele $LSNP$ şi $KRMQ$ sînt trapeze isoscele.

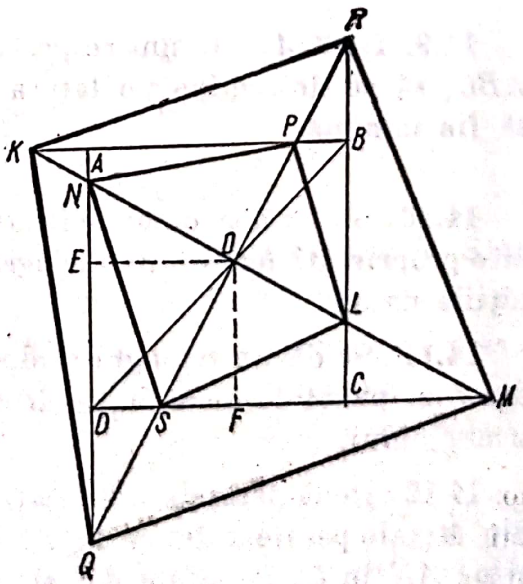


Fig. 14.19

14.20. Într-un triunghi oarecare ABC se ia un punct M oarecare pe latura BC. Prin acest punct se duce o paralelă la bisectoarea unghiului A care taie laturile AB şi AC, respectiv în N şi P.

Să se demonstreze că:

a) triunghiul ANP este isoscel;

b) dreapta care uneşte jumătatea segmentului NP cu vîrful A este perpendiculară pe bisectoarea unghiului A.

G.M.B., 1959, pag. 621

Scanned with OKEN Scanner

14.21. Se dă un triunghi isoscel ABC; pe prelungirea bazei se iau segmentele $BD = CE$. Din punctele D şi E pe laturile egale se duc perpendicularele DF şi EG pînă se intersectează în punctul M. Să se arate că:

a) $\sphericalangle BDM = \sphericalangle CEM$;

b) dreptele FG şi BC sînt paralele.

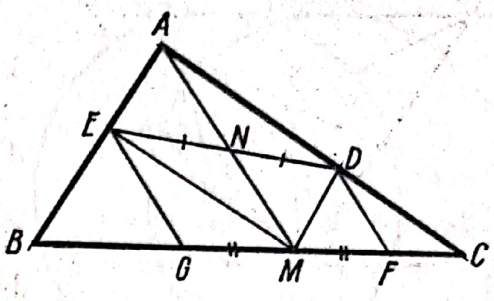


Fig. 14.25

14.22. Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, perpendiculara din B pe BC întîlneşte pe AC în D, iar bisectoarea unghiului B taie latura AC în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B şi C se taie formînd un unghi de 135° şi că segmentele BD şi DE sînt egale.

14.23. Într-un dreptunghi $ABCD$ bisectoarea unghiului BAD taie diagonala BD în E, iar latura BC în F. Ştiind că paralela dusă din E la AB taie pe AC în G, să se arate că dreptele GF şi BD sînt perpendiculare .

14.24. Se dă un triunghi isoscel ABC, avînd baza AC şi se duc medianele AF şi CE din unghiurile egale, care întîlnesc laturile opuse în punctele E şi F. Fie D punctul de intersecţie al celor două mediane. Ducîndu-se EN şi FH paralele, respectiv cu AF şi CE care se întîlnesc în punctul M, să se arate că patrulaterul $DEMF$ este un romb.

14.25. Se dă un triunghi oarecare ABC şi un punct M pe BC. Paralela dusă din M la AB taie pe AC în D, iar paralela dusă din M la AC taie pe AB în E. Paralela la AM dusă prin D şi E taie pe BC, respectiv în F şi G. Să se demonstreze că segmentele GM şi MF sînt egale.

Capitolul XV

15.1. Să se arate cum se poate afla centrul unui cerc folosind un echer negradat şi un creion ascuţit subţire.

15.2. Folosind rigla şi compasul să se împartă unghiurile de 108°, 54° şi 27° în cîte 3 părţi egale.

15.3. Două cercuri de raze egale se taie astfel încît îşi au centrele în partea lor comună. Prin centrele lor se duc în acelaşi sens două paralele pînă cînd fiecare taie celălalt cerc. Să se arate că distanţa între extremităţile acestor paralele este constantă oricare ar fi direcţia lor.

G.M.B., 1964, pag. 88

Scanned with OKEN Scanner

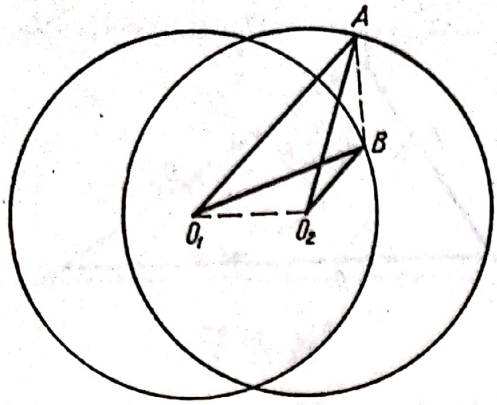


Fig. 15.3.

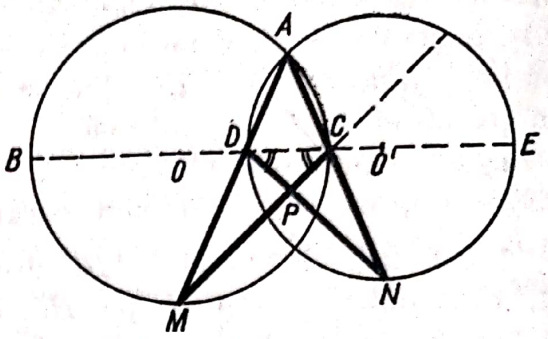


Fig. 15.4

15.4. Fie A unul din punctele de intersecţie a două cercuri secante. Dreapta dusă prin cele două centre O şi O' taie cercurile, respectiv în B, C şi D, E. Dreptele AD şi AC taie cercurile, respectiv în M şi N, iar dreptele MC şi ND se taie în punctul P. Să se demonstreze că $PD = PC$.

15.5. Pe un cerc s-au luat punctele A, B, C, D în acelaşi sens, apoi măsurîndu-se arcele s-a găsit arcul $AB = 5$ cm, arcul $BC = 3$ cm, arcul $CD = 4$ cm şi arcul $DA = 7$ cm. Să se arate că unghiul CBD este egal cu unghiul ascuţit format de dreptele AB şi DC.

15.6. Două cercuri sînt secante în A şi B. Se duc diametrele AA_1 şi AA_2 celor două cercuri. Să se arate că punctele A_1, B, A_2 sînt în linie dreaptă.

15.7. Se dă un triunghi ABC în care unghiul B este de două ori mai mare decît unghiul C, iar A este de 1,5 ori mai mare decît unghiul B. Prin A se duce o secantă care face cu AB un unghi de 60° şi taie latura BC în punctul O. Să se arate că:

a) triunghiul ABC este dreptunghic;

b) punctul O se află la mijlocul lui BC.

15.8. Se dă un cerc cu raza de 2 cm. Să se înscrie în cerc un triunghi în care unghiurile să fie proporţionale cu numerele, 3, 4, 8. Să se calculeze unghiurile în grade, minute şi secunde.

15.9. Fiind date unghiurile A, B, C ale unui triunghi înscris într-un cerc, să se exprime unghiurile triunghiului ale cărui vîrfuri sînt punctele de intersecţie ale înălţimilor triunghiului ABC cu cercul.

15.10. Se dau două cercuri, O şi O' secante în A şi B. Prin A se duce o secantă care taie cercurile în punctele C şi C'. Să se arate că unghiurile OCB şi $O'C'B$ sînt egale.

G.M.B., 1964, pag. 118

15.11. Într-un cerc se duce o coardă AC egală cu latura pătratului înscris, iar de o parte şi de alta a coardei se duc din A coarde de lungimea razei.

Să se calculeze mărimea unghiurilor formate.

Scanned with OKEN Scanner

15.12. În triunghiul oarecare ABC fie A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 picioarele înălțimilor, respectiv mijloacele laturilor BC, CA, AB. Să se arate că:

$$\sphericalangle A_1C_2B_1 + \sphericalangle B_1A_2C_1 + \sphericalangle C_1B_2A_1 = 180°.$$

Se consideră toate unghiurile A, B, C ascuțite.

G.M.B., 1963, pag. 563

15.13. Două cercuri tangente în A. Dreapta care trece prin centrele cercurilor mai taie cercurile în B și C. O secantă ce trece prin A taie cercurile, respectiv în D și E. Care este poziția acestei secante cînd aria patrulaterului $BDCE$ este cea mai mare?

G.M.B., 1964, pag. 88

15.14. În triunghiul ABC cu unghiul $A = 60°$ se duce bisectoarea AA'. Din A' se duce $A'M$ perpendiculară pe AB. Din M se duce perpendiculara MN pe AA'. Să se arate că $3A'M = AA' + 2A'N$.

15.15. Perimetrul unui trapez isoscel $ABCD$ circumscris unui cerc este de 56 cm, iar unghiul sub care se vede baza mare AD din centrul cercului este 120°. Să se calculeze laturile trapezului.

G.M.B., 1959, pag. 40

15.16. Se consideră AB latura pentagonului regulat înscris într-un cerc și fie I simetricul centrului cercului față de AB. Dreapta AI mai taie cercul în C. Să se arate că triunghiul IBC este isoscel.

G.M.B., 1963, pag. 728

15.17. În triunghiul ABC, înălțimea și bisectoarea vîrfului A taie cercul circumscris în A_1 și A_2. Se duc diametrele BB' și CC'. Să se exprime unghiurile patrulaterului $A_1A_2B_1C_1$, în funcție de unghiurile triunghiului ABC.

15.18. Fie un triunghi oarecare ABC și P un punct pe mediatoarea laturii BC dusă prin A_1, mijlocul laturii BC. Din punctul P se duc perpendicularele PM și PN, respectiv pe AB și AC. Să se arate că $\sphericalangle A_1MP = \sphericalangle A_1NP$.

15.19. Dintr-un punct A se duc tangentele AT_1 și AT_2 la un cerc dat de centru O. Perpendiculara în A pe AT_1, taie dreapta OT_2 într-un punct I. Să se arate că punctul I este egal depărtat de O și de tangenta AT_1.

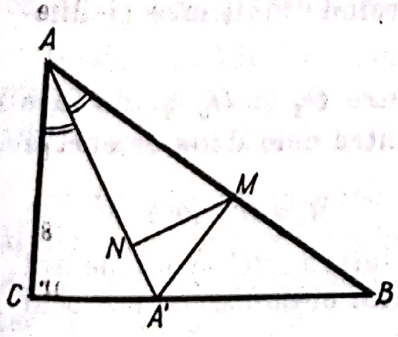


Fig. 15.14

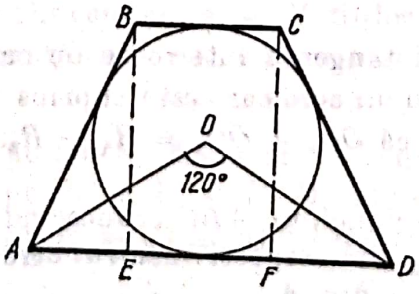


Fig. 15.15.

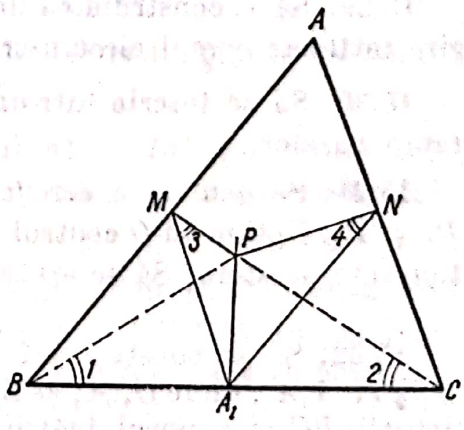


Fig. 15.18

15.20. Prin două puncte fixe A şi B să se ducă două paralele astfel ca distanţa dintre cele două paralele să fie 0,6 AB.

15.21. În triunghiul echilateral ABC, paralela dusă din C la AB taie perpendiculara din A pe AB în punctul D. Să se arate că CD este jumătate din latura triunghiului echilateral.

15.22. Se dă un cerc cu lungimea de 16 metri. În acest cerc este înscris triunghiul ABC, astfel că lungimea arcului AB este 10 metri şi lungimea arcului AC de 4 metri. Înălţimile triunghiului ABC se prelungesc pînă taie cercul respectiv în punctele A_1, B_1, C_1. Să se calculeze în grade, minute şi secunde sexagesimale unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$.

15.23. Să se demonstreze că în orice triunghi ascuţitunghi, diferenţa a două unghiuri este mai mică decît 30°.

15.24. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd vîrful A, mijlocul laturii AC şi piciorul bisectoarei duse din vîrful C.

15.25. Să se arate că perpendicularele duse din vîrful unghiului drept A al unui triunghi dreptunghic ABC pe bisectoarele unghiurilor din vîrful B şi C sînt bisectoarele unghiurilor formate de înălţimea din A şi cele două catete.

15.26. Să se construiască triunghiul ABC, cunoscînd latura BC, distanţa HA_1 de la ortocentrul H pînă la latura BC, precum şi distanţa A_1A_2 de la mijlocul A_2 al laturii BC la S_1 piciorul înălţimii AA_1.

G.M.B., 1959, pag. 99

15.27. Să se construiască trapezul $ABCD$, cunoscînd punctul O de intersecţie al laturilor neparalele AB şi CD, vîrfurile A şi C şi înălţimea trapezului.

G.M.B., 1958, pag. 476

15.28. Se consideră un triunghi ABC. Prin A se duce o dreaptă perpendiculară pe AB, prin B o perpendiculară pe BC şi prin C o dreaptă perpendiculară pe CA. Se formează astfel un nou triunghi $A'B'C'$. Se cere să se calculeze unghiurile triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de unghiurile triunghiului ABC.

G.M.B., 1959, pag. 50

15.29. Să se construiască un triunghi cunoscînd punctele unde înălţimile prelungite întîlnesc cercul circumscris triunghiului.

15.30. Să se înscrie într-un cerc dat un trapez, cunoscînd înălţimea şi diferenţa bazelor.

15.31. Se dau două cercuri tangente interioare de centre O_1 şi O_2 şi de raze R_1 şi R_2. Notăm cu O centrul unui cerc care este cuprins între cele două cercuri şi tangenta acestora. Să se arate că $OO_1 + OO_2 = R_1 + R_2$.

G.M.B., 1959, pag. 52

15.32. Să se construiască triunghiul ABC, cunoscînd latura BC şi segmentul OA_2 şi A_1A_2, unde O, A_1 şi A_2 sînt respectiv centrul cercului circumscris, mijlocul laturii BC şi piciorul înălţimii din A.

G.M.B., 1960, pag. 180

Scanned with OKEN Scanner

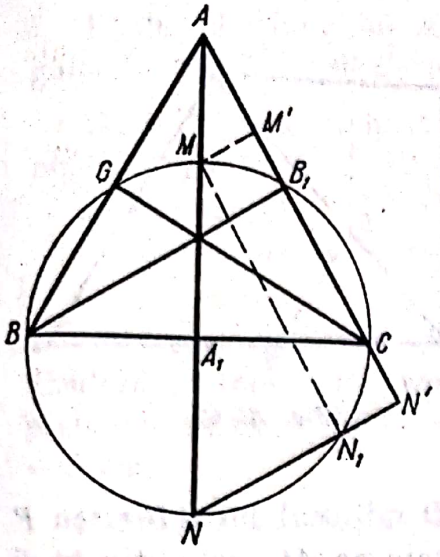


Fig. 15.34

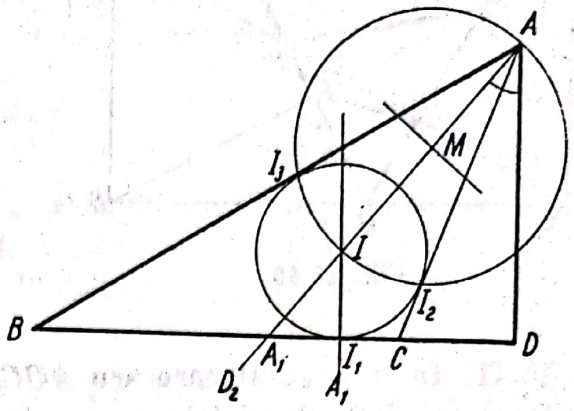


Fig. 15.36

15.33. Să se construiască un triunghi oarecare, cunoscînd raza cercului înscris şi două unghiuri ale triunghiului de 60° şi 45°.

G.M.B., 1958, pag. 678

15.34. Înălţimea AA_1 a unui triunghi echilateral ABC intersectează cercul descris pe BC ca diametru în punctele M şi N. Să se arate că proiecţia segmentului MN pe una din laturile AB sau AC este egală cu înălţimea AA_1.

15.35. Să se construiască numai cu rigla şi compasul triunghiul ABC, cunoscînd mediana AM, latura BC şi unghiul pe care-l face mediana AM cu mediatoarea laturii BC, egal cu α dat.

15.36. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd raza cercului înscris, lungimea bisectoarei unghiului A, precum şi unghiul pe care-l face bisectoarea unghiului A cu înălţimea ce pleacă din acelaşi vîrf cu ea.

G.M.B., 1959, pag. 100

15.37. Ce poziţie are bisectoarea unghiului exterior de la vîrful unui triunghi isoscel faţă de baza triunghiului. Dacă avem o linie gradată şi un echer, să se arate cum să construim cu aceste instrumente un unghi ascuţit dat.

15.38. Să se construiască un triunghi, cunoscînd o latură şi lungimile medianelor duse din extremităţile ei.

15.39. Fie ABC un triunghi echilateral şi M mijlocul laturii BC. Se proiectează B şi C în N şi P pe o dreaptă oarecare ce trece prin A. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

15.40. Fie M un punct pe latura AD a unui dreptunghi $ABCD$. Cu centrul în M descriem un cerc ce taie pe BC în E şi F. Dreptele ME şi MF taie diagonalele AC şi BD în G şi I, respectiv H şi J. Să se demonstreze că $GHIJ$ este un patrulater inscriptibil.

G.M.B., 1958, pag. 235

Scanned with OKEN Scanner

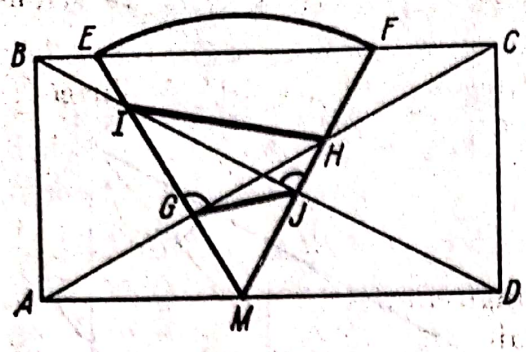


Fig. 15.40

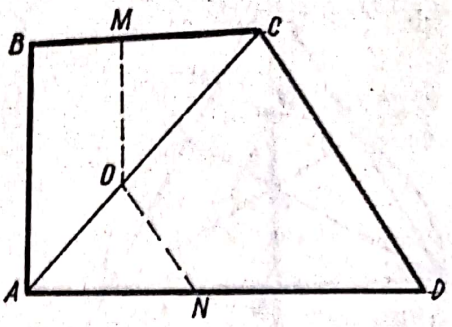


Fig. 15.42

15.41. În triunghiul oarecare ABC se notează cu D mijlocul lui AB şi cu F mijlocul lui BD. Paralelele duse prin D şi F la BC taie pe AC, respectiv în E şi H. Să se arate că $3DE = 2FH$.

15.42. Se dă un punct O pe diagonala AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Se duce OM paralelă la AB pînă taie latura BC în M, iar apoi paralela la CD pînă taie latura AD în N. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{OM}{AB} + \frac{ON}{CD} = 1.$$

G.M.B., 1959, pag. 483

15.43. Se dă un patrulater oarecare $ABCD$. Paralela la BC care trece prin A taie diagonala BD în E, iar paralela la AD care trece prin B taie diagonala AC în F. Să se demonstreze că dreptele CD şi EF sînt paralele între ele.

G.M.B., 1961, pag. 500

15.44. Fie un trapez $ABCD$ ale cărui diagonale AC şi BD se taie în O, bazele fiind AB şi CD. Paralelele la diagonalele duse prin B şi C se taie în M, iar paralelele la diagonalele duse prin A şi D se taie în N. Să se demonstreze că MN este paralelă cu bazele trapezului, iar segmentul de pe MN cuprins între diagonale este cît diferenţa bazelor.

15.45. Într-un triunghi ABC se duce mediana BB'. Notăm cu M mijlocul ei. Dreapta AM întîlneşte latura BC în D. Să se demonstreze că $AD = 4MD$.

15.46. Se dau două cercuri concentrice şi două semidrepte care pleacă din centrul O şi taie cercurile în A şi B, respectiv în A_1 şi B_1. Să se arate că triunghiurile OAB şi OAB_1 sînt asemenea, respectiv cu OA_1B_1 şi OA_1B.

15.47. Bisectoarea AM a unui triunghi oarecare ABC întîlneşte cercul circumscris în punctul N. Să se arate că triunghiurile AMB, MNC, ACM sînt asemenea. La fel triunghiurile AMC, BNM şi ABN sînt asemenea.

15.48. În paralelogramul $ABCD$ o dreaptă pornind din vîrful D taie AB în M, astfel încît $AB = 5AM$; iar N fiind intersecţia lui DM cu diagonala AC se cere valoarea raportului $\frac{AN}{AC}$.

Scanned with OKEN Scanner

15.49. În triunghiul ABC ducem înălțimile BB_1 și CC_1. Să se arate că triunghiurile AB_1C_1 și ABC sînt asemenea.

15.50. În triunghiul ABC se notează cu O mijlocul medianei AA'. Se duce BO pînă taie pe AC în B' și CO pînă taie pe AB în C'. Se cere:

a) să se arate că BC și $B'C'$ sînt paralele;

b) să se arate că 18 aria $OB'C'$ = aria ABC.

G.M.B., 1962, pag. 615

15.51. În mijlocul D al ipotenuzei AB a triunghiului ABC ridicăm o perpendiculară pe ipotenuză. Această perpendiculară taie cateta CB în punctul M, iar prelungirea catetei AC în N. Să se calculeze ipotenuza dacă $DM = 3$ cm și $MN = 9$ cm.

15.52. Fie ABC un triunghi oarecare, iar AA', BB', CC' trei drepte concurente într-un punct P. Să se demonstreze relația:

$$\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{AP}{PA'}.$$

15.53. Pe baza AB a unui triunghi ABC se ia un punct oarecare P din care se duce o paralelă la mediana CM a triunghiului. Această paralelă taie celelalte două laturi sau prelungirile lor în punctele D și E. Să se arate că $PD + PE = 2MC$.

15.54. Fie $ABCD$ un trapez avînd baza mică $AB = a$, baza mare $DC = b$. Pe latura AD se ia un punct M, astfel că $\frac{MA}{MD} = \frac{m}{n}$. Prin M se duce o paralelă MN la cele două baze. Să se calculeze lungimea MN, în funcție de a, b, m și n.

15.55. Să se demonstreze că dacă unul din unghiurile unui triunghi dreptunghic este de 15°, înălțimea dusă din vîrful unghiului drept este un sfert din ipotenuză.

15.56. În triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AC = b$, $AB = c$ se înscrie un semicerc tangent catetelor și cu diametrul pe ipotenuză. Să se demonstreze că:

a) mijlocul diametrului semicercului este piciorul bisectoarei interioare a unghiului A;

b) raza semicercului este dată de relația:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

G.M.B., 1960, pag. 114

15.57. Pe laturile opuse AB și CD ale unui paralelogram, luăm respectiv punctele M și N, astfel că $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = m$. Dreptele DM și BN taie diagonala AC în punctele R și S. Să se arate că:

$$AC = (2m + 1)RS.$$

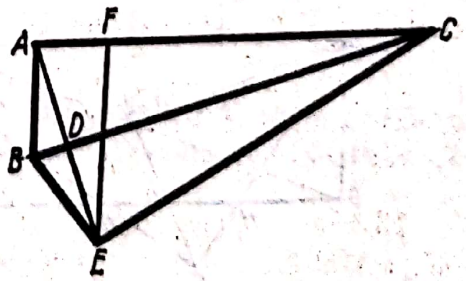


Fig. 15.55

15.58. Se dă un triunghi oarecare ABC și un punct oarecare M pe BC. Paralela dusă din M la

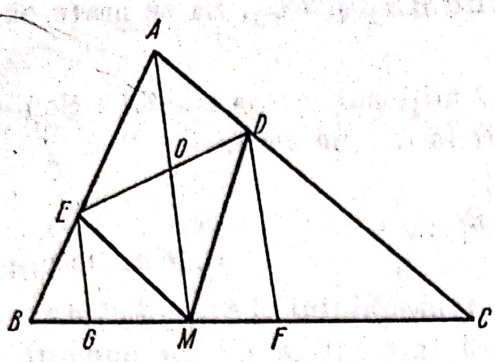


Fig. 15.58

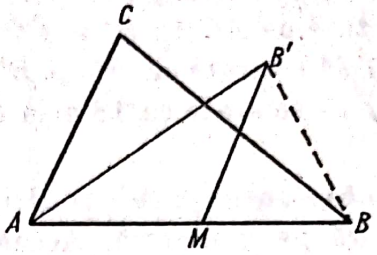


Fig 15.59

AB taie pe AC în D, iar paralela prin M la AC taie pe AB în E. Paralelele la AM duse prin D şi E taie pe BC, respectiv în F şi G. Să se demonstreze că segmentele GM şi MF sînt egale.

15.59. Se dă un triunghi ABC. Bisectoarea unghiului A taie dreapta care uneşte mijloacele laturilor AB şi BC în punctul B'. Să se arate că dreptele AB' şi BB' sînt perpendiculare.

G.M.B., 1964, pag. 267

15.60. În dreptunghiul $ABCD$ notăm cu O intersecţia diagonalelor. Perpendiculara ridicată în O pe AC taie latura DC în E, iar bisectoarea unghiului DAC în F. Perpendiculara ridicată în F pe AF taie pe DC în G. Se cere:

a) să se arate că triunghiul FEG este isoscel;

b) valoarea unghiului DAC pentru care dreapta FG este paralelă cu DB.

G.M.B., 1964, pag. 179

15.61. Se dă trapezul $MNPQ$ dreptunghic, cu unghiurile drepte în M şi N, iar O intersecţia diagonalelor. Paralela dusă prin O la baze întîlneşte latura MN în punctul R. Să se arate că:

a) $\frac{MR}{RN} = \frac{MQ}{NP}$;

b) dreapta OR este bisectoarea unghiului PRQ;

c) $\frac{1}{RO} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{NP}$.

G.M.B., 1963, pag. 683

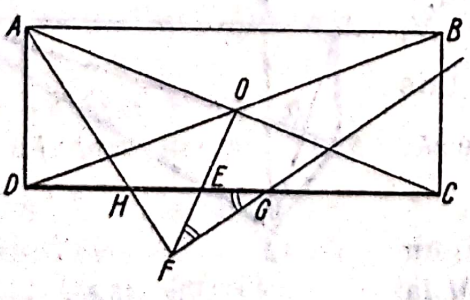


Fig. 15.60

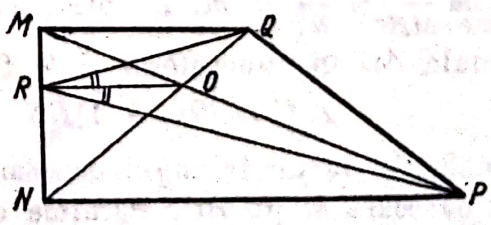


Fig. 15.61

Capitolul XVI

16.1. Să se construiască un triunghi ABC dreptunghic în A, cunoscînd lungimea catetei AB şi a medianei din A.

16.2. Latura unui triunghi echilateral este egală cu a. Să se calculeze lungimea segmentelor care unește mijloacele a două înălțimi.

16.3. Să se construiască un triunghi echilateral, dacă se cunoaşte suma distanţelor de la un punct din interiorul său la cele 3 laturi.

16.4. Se dă un dreptunghi $ABCD$ în care $BC = 2AB$. Perpendiculara AO din A pe BD taie latura BC în E. Să se arate că $BC = 4BE$ şi că punctul O se află pe dreapta ce uneşte mijloacele BE şi AD.

G.M.B., 1964, pag. 88

16.5. În triunghiul dreptunghic ABC se duce înălţimea AD. Dacă $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, să se arate că $\frac{BD}{DC} = \frac{9}{16}$, unghiul drept fiind în A.

G.M.B., 1960, pag. 308

16.6. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza a şi catetele b şi c. Să se arate că:

$$\frac{a+c}{b} + \frac{b}{a+c} = \frac{2a}{b}.$$

G.M.B., 1963, pag. 296

16.7. Fie AD înălţimea unui triunghi dreptunghic în A. Să se arate că $AB \cdot AD \cdot AC = BD \cdot DC \cdot BC$.

16.8. Într-un trapez $ABCD$ raportul dintre baza mică şi baza mare este 4/5, iar înălţimea trapezului este 4 cm. Prelungind laturile neparalele ale trapezului, ele se întîlnesc în E. Să se afle distanţa de la acest punct la baza mare.

16.9. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) cu baza $BC = 8$ cm şi înălţimea $AD = 3$ cm. Prin punctul D se duc paralele la laturile AB şi AC pe care le taie respectiv în punctele E şi F. Diagonalele paralelogramului $AEDF$ se taie în O. Se cere:

a) să se arate prin calcul, că înălţimea dintr-un vîrf al bazei pe latura opusă este de 4 ori distanţa de la O la aceeaşi latură;

b) să se arate aceasta şi direct geometric.

16.10. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu a. Pe diagonala AC se ia punctul P, astfel încît $4PC = AC$. Fie E intersecţia lui BP cu CD, O centrul pătratului şi M intersecţia lui BP cu perpendiculara din O pe BC:

a) să se calculeze CE;

b) să se arate că triunghiul OEM este isoscel.

G.M.B., 1958, pag. 347

Scanned with OKEN Scanner

16.11. În triunghiul dreptunghic ABC notăm cu M şi N proiecţiile piciorului înălţimii unghiului drept A pe laturile CA şi AB. Să se stabilească relaţiile:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} = \left(\frac{CA}{AB}\right)^2.$$

G.M.B., 1961, pag. 120

16.12. Din vîrfurile B şi C ale unui triunghi oarecare ABC ducem paralele la înălţimea AD pe care dreptele AC şi AB o taie în M şi N. Să se arate că $BM \cdot DC = NC \cdot BD$.

16.13. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd mediana $AM = 4$ cm, unghiul $A = 65°$ şi $B = 35°$.

16.14. Într-un trapez $ABCD$, diagonalele AC şi BD sînt perpendiculare. Să se arate că $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

16.15. Un dreptunghi $ABCD$ are baza $AB = 4$ cm. Înălţimea este $BC = 3$ cm. Din vîrful C se duce o perpendiculară CE pe diagonala BD şi din vîrful D perpendiculara DF pe diagonala AC. Să se demonstreze că EF şi AB sînt paralele.

G.M.B., 1959, pag. 743

16.16. Se dă un patrulater $ABCD$ dreptunghic în A, cu diagonalele perpendiculare. Se cunosc laturile $AB = 6$ dm, $AD = 8$ dm, diagonala $AC = 12$ dm. Să se afle perimetrul $ABCD$.

16.17. Să se arate că dacă $0 < x < 90°$.

$$\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\sin x}} = 1;$$

$$\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\sin x}} = 1.$$

16.18. Să se arate că:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} x} = 1;$$

$$\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} x} = 1.$$

unde $0 < x < 45°$ şi $45° < x < 90°$.

16.19. Să se arate că dacă $x \neq 45°$, avem:

$$\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} = 1;$$

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

16.20. Să se arate că pentru $0 < x < 90°$, avem:

$$\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\cos x}} = 1;$$

$$\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\cos x}} = 1.$$

16.21. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{\dfrac{1}{\sin^2 x} + 2 \operatorname{ctg} x},$$

unde $0 < x < 90°$.

16.22. Să se arate că dacă $0 < x < 90°$, avem:

$$\frac{1 : (1 + \sin x)^3 + 1 : (1 - \sin x)^3}{1 : (1 + \cos x)^3 + 1 : (1 - \cos x)^3} = \frac{1 + 3 \sin^2 x}{1 + 3 \cos^2 x} \operatorname{tg}^6 x.$$

16.23. Să se arate că:

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1 + \operatorname{ctg} x}; \quad \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1 - \operatorname{ctg} x} = 0,$$

unde $0 < x < 90°$.

16.24. Într-un triunghi ABC se cunosc unghiurile A, B, C și raza cercului înscris r. Să se exprime laturile AB, BC, CA și aria triunghiului în funcție de datele problemei. Aplicație: $A = 60°$, $B = 45°$, $r = 5$ m.

16.25. Se prelungesc în același sens laturile triunghiului ABC astfel încît $CD = BC$; $AE = CA$; $BF = AB$.

Să se arate că aria $DEF = 7$ aria ABC.

16.26. Pe latura AB a unui paralelogram $ABCD$ se ia un punct P prin care ducem două drepte, una paralelă la BD care taie latura AD în M și alta paralelă la AC care taie pe BC în N. Fie E intersecția diagonalelor NE și PC.

Să se demonstreze că aria PMN = aria DMP + aria CNP.

G.M.B., 1961, pag. 180

16.27. Pe latura BC a unui dreptunghi $ABCD$ se ia un punct M. Dreapta AM taie diagonala BD în punctul N. Să se arate că triunghiurile ANB și DMN au arii egale.

16.28. Se dă un triunghi oarecare ABC și se cere să se construiască un triunghi asemenea cu cel dat, având o arie de 9 ori mai mică.

16.29. În triunghiul ABC dreptunghic în A se duce înălțimea AA'. Perpendiculara dusă din A' pe mediana AM taie cateta AC în punctul D. Să

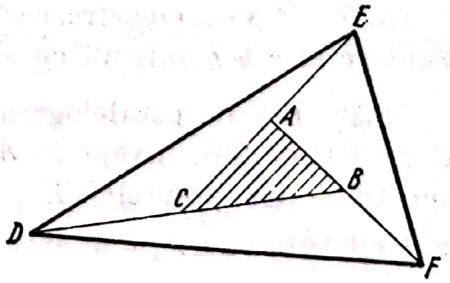


Fig. 16.25

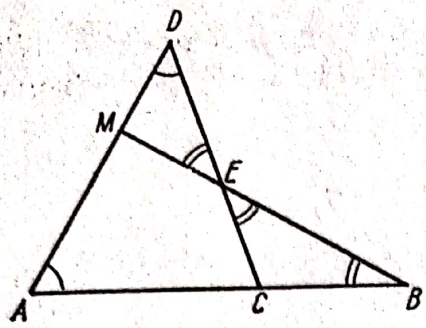


Fig. 16.30

se arate că suma ariilor triunghiurilor ABA' şi MCD este egală cu aria patrulaterului $AA'MD$.

16.30. Pe un segment fix AB se ia un punct variabil C cuprins între A şi B. Prin acest punct se duce o dreaptă variabilă pe care se iau în acelaşi sens segmentele $CD = AC$ şi $CE = BC$. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor AD şi BE.

G.M.B., 1960, pag. 245

16.31. Să se arate că în triunghiul ABC, unde H este punctul de concurenţă al înălţimilor şi S este aria triunghiului avem:

$$4S = BC \cdot AH + BC \cdot BH + AB \cdot CH.$$

16.32. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, iar x, y, z sînt segmentele determinate pe aceste laturi de cercul înscris, să se dovedească relaţia $xy + yz + zx = ab + bc + ca - p^2$, unde $a + b + c = 2p$.

16.33. În trapezul dreptunghic $ABCD$ de baze AB şi CD fie E mijlocul înălţimii AD, iar $AD = DC$. Să se arate că dacă BE şi EC sînt perpendiculare, atunci aria $ABCD$ este egală cu de zece ori aria pătratului de latură AB.

16.34. Pe laturile BC, CA şi AB ale unui triunghi se iau respectiv punctele A_1, B_1, C_1 astfel că:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}.$$

Fie A_2 intersecţia dreptelor BB_1 cu CC_1, B_2 intersecţia dreptelor AA_1 cu CC_1 şi C_2 intersecţia dreptelor AA_1 cu BB_1. Să se arate că aria $A_2B_2C_2$ = aria AB_2C_1 + + aria BC_2A_1 + aria CA_2B_1.

16.35. Pe o dreaptă se ia segmentul AB şi în prelungire $BC = 2AB$. De aceeaşi parte a dreptei se construiesc triunghiuri echilaterale ABD şi BCE. Pe laturile AD, BD, BE şi CE se iau respectiv punctele M, N, R, S, astfel că: $AM = MD$; $BN = ND$; $BR = 3RE$ şi $CS = 3SE$. Să se demonstreze că triunghiul BDE este dreptunghic şi are aria de două ori cît a triunghiului ABD, iar patrulaterul $MNSR$ este un paralelogram de aceeaşi arie cu a triunghiului ABD.

16.36. Un trapez isoscel $ABCD$ circumscris unui cerc are unghiul de la baza mare de 60° şi linia mijlocie MN de 4 metri. Se cere aria cuprinsă între cerc şi laturile trapezului. (M este mijlocul lui AB şi $AD > BC$.)

16.37. Să se demonstreze că aria unui trapez isoscel care are diagonalele perpendiculare este echivalentă cu aceea a pătratului cu latura cît înălţimea trapezului.

16.38. Fie un paralelogram $ABCD$ şi un punct E pe latura AB. Dreptele AC şi DE se taie în punctul I, iar dreptele CE şi IB se taie în G. Să se arate că:

Aria AEI + aria BEG = aria CIG.

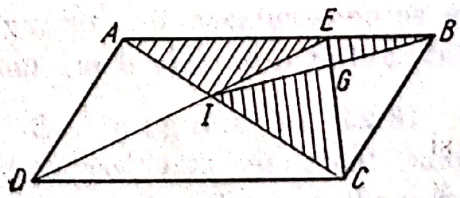


Fig. 16.38

16.39. Fie H punctul de întîlnire al înălțimilor unui triunghi echilateral ABC. Perpendiculara din A pe AB întîlnește dreapta BH în punctul B_1, iar perpendiculara din A pe AC întîlnește dreapta CH în punctul C_1.

a) Să se arate că figura AB_1HC_1 este romb.

b) Să se arate că dublul ariei ABC este triplul ariei AB_1HC_1.

16.40. Folosindu-se gunoi de grajd și îngrășăminte chimice s-a obținut un spor de recoltă de 360 kg de porumb la hectar. Care este sporul de recoltă ce s-a obținut pe o tarla în formă de trapez isoscel cu laturile de 70 m, 280 m, 406 m și 280 m?

16.41. Se dă un triunghi ABC în care unghiul A este de 45°. Înălțimile BB_1 și CC_1 se taie în H.

a) Să se demonstreze că $CB_1 = B_1H$; $HC_1 = C_1B$.

b) Să se arate că $\sphericalangle C_1B_1B = 90° - \sphericalangle B$.

c) Dacă triunghiul ABC are toate unghiurile ascuțite și $A = 45°$ să se arate că aria $4BC = 2$ aria AB_1C_1.

16.42. Roata din față a unei trăsuri are diametrul de 0,90 metri, iar cea din spate are raza de 0,62 metri. Pe un drum ambele roți au făcut împreună 32 100 învîrtituri. Cîte învîrtituri au făcut roțile din spate și cîte roțile din față și care este distanța parcursă?

16.43. Pe latura BC a triunghiului oarecare ABC luăm un punct D. Fie E și F proiecția punctului D pe înălțimile triunghiului duse din B și C.

Să se arate că: $AB \cdot CF + AC \cdot BE = 2$ aria ABC.

G.M.B., 1961, pag. 47

16.44. Într-un triunghi ascuțitunghi ABC se știe că unghiul A este de 45°. Se dau înălțimile BB_1 și CC_1 care se taie în H.

a) Să se arate că $CB_1 = B_1H$.

b) Să se demonstreze că segmentul B_1C_1 desparte aria triunghiului ABC în două părți egale.

16.45. La un cerc cu raza de 4,5 cm se duc două tangente dintr-un punct situat la 7,5 cm de centru. Să se afle:

a) lungimea fiecărei tangente

b) distanța de la centru pînă la coarda care unește punctele de tangență.

Concursul de matematică, cl. VII, Hunedoara, 1966

16.46. Într-un paralelogram $ABCD$ latura AB este de 42 cm, BC de 120 cm, iar unghiul B de 30°.

Să se calculeze:

a) Înălțimile paralelogramului

b) Dacă pe latura BC se consideră punctul E astfel ca să avem $BE/EC = 5/7$ și se duce dreapta DE care taie prelungirea laturii AB în F, să se afle mărimea segmentului BF.

Concursul de matematică, cl. VII, Bacău, 1966

Scanned with OKEN Scanner

16.47. În trapezul dreptunghic $ABCD$, baza mică AD, baza mare BC și latura DC oblică față de baze, au respectiv 5 cm, 10 cm, 13 cm. Pe diagonala AC se consideră un punct E astfel încît $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$; iar prin punctul E se duce o paralelă la baze care intersectează laturile neparalele ale trapezului în punctele F și G. Să se afle aria trapezului și lungimea segmentului FG.

Concursul de matematică, cl. VII, Banat, 1966

16.48. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ cu AB baza mică, CD baza mare și înălțimea de 6 cm. Raportul bazelor este 0,(6), iar semisuma bazelor (linia mijlocie) este de 12,5 cm. Prin punctul O de intersecție a diagonalelor se duce o dreaptă paralelă cu bazele și care taie laturile neparalele în M pe AD și în N pe BC.

a) Să se afle perimetrul trapezului.

b) Să se arate că $CD \cdot BN = AB \cdot NC$.

c) Prelungind laturile neparalele, acestea se întîlnesc în punctul P. Să se afle perimetrul triunghiului PAB.

Concursul de matematică, cl. VII, Ploiești, 1966

16.49. Se dau două cercuri de centre O și O', iar de raze R și R' tangente exterior, punctul lor de tangență fiind T. Prin punctul T se duce o dreaptă variabilă care intersectează din nou cele două cercuri respectiv în A și A'.

a) Să se demonstreze că cele două tangente duse la cele două cercuri date, în punctele A și A' sînt paralele.

b) Tangenta comună celor două cercuri taie cele două tangente în punctele B, respectiv B'.

Să se demonstreze că triunghiurile ABT și $A'B'T'$ sînt asemenea.

c) Să se demonstreze că patrulaterul $OBO'B'$ este trapez.

d) Pentru ce poziție a dreptei variabile dusă prin T, cele două triunghiuri sînt dreptunghice?

Să se calculeze în acest caz lungimile segmentelor AT și $A'T$ în funcție de razele celor două cercuri.

Concursul de matematică, clasa VII, 1966

16.50. În triunghiul ABC se duce bisectoarea interioară a unghiului A; perpendiculara din B pe bisectoarea interioară AD întîlnește latura AC în B'.

a) Să se arate ce fel de triunghi este ABB'.

b) Din punctele B și C se duc paralele la bisectoarea AD care întîlnește prelungirile laturilor AB și AC respectiv în E și F.

Să se arate că triunghiurile ABE și ACF sînt isoscele.

Concursul de matematică, cl. VI, Bacău, 1966

16.51. În triunghiul ABC se duc înălțimile AA' și BB' care fac cu AB, respectiv unghiurile de 10° și 50°. Fie $A'D$ mediana triunghiului $AA'C$, iar pe latura $A'C$ se ia un punct oarecare M. Perpendiculara din M pe $A'D$, taie prelungirea laturii AC în F.

a) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă BB' și $A'D$ se intersectează în N, să se arate că $\sphericalangle ANB' = \sphericalangle AA'D$.

c) Să se arate că triunghiul FCM este isoscel.

Concurs la clasa a VI-a, 1969, Tîrgoviște

16.52. Perpendicularele pe diagonalele BD a dreptunghiului $ABCD$ duse în B și D intersectează laturile DC și BC în M și N. Să se arate că:

a) $\frac{AB}{BC} = \frac{BN}{DM}$; *b*) $\frac{BM}{BN} = \frac{AD}{DN}$, $\frac{BM}{DM} = \frac{AB}{DN}$;

c) $AB^2 + BC^2 = BM \cdot DN$.

G.M.B., 1970, pag. 363

16.53. Fie triunghiul ABC în care se duce bisectoarea AD. Punctul D se proiectează pe AB și AC în E, respectiv în F.

a) Să se arate că patrulaterul $AEDF$ este inscriptibil și că diagonalele sale sînt perpendiculare.

b) În ce caz latura BC este tangentă cercului circumscris patrulaterului $AEDF$? În ce caz avem $BE = CF$?

G.M.B., 1969, pag. 748

16.54. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 3$ cm și $AC = 6$ cm. Notăm cu O mijlocul laturii BC. Paralelele la OA duse respectiv prin B și C întîlnesc perpendiculara din A pe OA respectiv în B' și C'.

a) Să se arate că AC este bisectoarea unghiului OCC' iar AB bisectoarea unghiului OBB'.

b) Să se arate că AB' este medie proporțională între segmentele CC' și BB'.

c) Să se calculeze perimetrul patrulaterului $B'BCC'$.

Concursul de matematică, clasa a VII-a, București, 1971

Capitolul XVII

17.1. Pentru nichelarea unui obiect cu suprafața de 24 dm² s-au folosit 44 g nichel. Densitatea nichelului fiind 8,8 să se afle grosimea stratului de nichel în sutimi de milimetru.

17.2. Se dă un paralelipiped dreptunghic; se mărește o dimensiune cu x, alta cu $2x$ și se micșorează a treia cu $3x$. Prin aceasta, aria totală nu s-a schimbat. Să se afle x, cunoscînd cele trei dimensiuni a, b, c.

17.3. O construcție are acoperișul format din două trapeze isoscele și două triunghiuri isoscele, toate egal înclinate față de planul orizontal de la baza acoperișului. Să se afle înălțimea trapezului și a acoperișului, baza acoperișului fiind un dreptunghi cu dimensiunile de 15 metri și 6 metri, iar aria întregului acoperiș este de 120 m².

Scanned with OKEN Scanner

17.4. Dacă înfăşurăm o panglică de 25 m lungime şi 0,1 mm grosime pe o ţeavă, obţinem un cilindru de 1 dm diametru. Se cere diametrul cilindrului fără panglică.

G.M.B., 1961, pag. 310

17.5. Un bazin circular este înconjurat de o coroană de beton. Nu putem măsura razele celor două cercuri, căci nu cunoaştem centrul lor, iar bazinul este plin cu apă. În schimb putem măsura segmentul a, care este coardă în cercul mare şi tangent la cercul mic.

a) Să se afle aria coroanei.

b) Dacă raza cercului mare este de 6,5 m; raza mică de 6 m, iar înălţimea stratului de beton este de 1,2 m, să se calculeze cît ciment a fost necesar pentru construirea coroanei ştiind că pentru prepararea betonului se ia o tonă de ciment, 2 tone nisip şi 6 tone pietriş şi că un metru cub de beton cîntăreşte 2 400 kg.

G.M.B., 1959, pag. 495

17.6. Cablul de la o sondă de foraj se înfăşoară pe o tobă cilindrică cu diametrul de 650 mm şi lungimea de 840 mm. Care este numărul aproximativ de spire ce se vor forma pe tobă, ştiind că lungimea cablului este 288 m şi diametrul lui este 28 mm, ştiind că se formează numai un rînd de spire.

G.M.B., 1959, pag. 690

17.7. Se dă diametrul $2r$ al tamburului unei rulete de oţel de lungime l şi grosime g. Să se afle diametrul ruletei înfăşurate. Caz numeric $r = 2$ cm, $l = 50$ m, $g = 0{,}157$ cm.

G.M.B., 1963, pag. 486

17.8. La un magazin se află un colac de şină de butoi în formă de coroană circulară, formată din 29 cercuri bine apropiate unul de altul. Să se afle lungimea şinei din colac, cunoscînd raza cercului mijlociu de 40,2 cm. Cît cîntăreşte colacul, ştiind că şina are o grosime de 0,2 cm şi lăţimea de 5 cm. Densitatea metalului se va socoti 7,6.

17.9. O grămadă de nisip aşezată pe pămînt formează un con circular drept. Aria cercului de bază este 12,56 m². Unghiul de pantă pentru nisip este 31°. Densitatea nisipului fiind 1,67, să se afle masa grămezii de nisip.

17.10. Două conuri circulare drepte au aceeaşi arie laterală, însă generatoarele lor fac cu planul bazei unghiuri, respectiv de 45° şi de 30°. Să se arate că raportul înălţimilor lor este $\sqrt[4]{6}$, iar raportul razelor lor este $\sqrt[4]{2:3}$. Care este raportul generatoarelor lor?

17.11. Să se afle de cîte ori este mai mic volumul Lunii decît al Soarelui, dacă diametrul Lunii este de 400 ori mai mic decît al Soarelui.

G.M.B., 1961, pag. 570

17.12. O bucată de fier în formă de prismă triunghiulară dreaptă are baza un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de 8 cm şi cîntăreşte 4 992 g. Să se afle înălţimea prismei, densitatea fierului fiind 7,8 g/cm².

17.13. Un con circular drept are raza de 3 dm şi înălţimea de 4 dm. Să se afle diametrul sferei circumscrise acestui con.

17.14. Să se demonstreze că volumul unui con circular drept este egal cu produsul dintre aria laterală prin a treia parte din distanţa de la centrul cercului de bază la o generatoare.

17.15. Un triunghi dreptunghic cu catetele de 60 cm şi 80 cm, rotindu-se în jurul ipotenuzei, dă naştere unui corp format din două conuri cu baza comună. Să se afle volumul corpului obţinut.

17.16. Cîţi metri pătraţi de tablă sînt necesari pentru construcţia a 100 găleţi în formă de trunchi de con, avînd ca fund un cerc cu diametrul de 24 cm, generatoare de 50 cm, iar baza mare fiind un cerc cu raza de 40 cm.

17.17. O sferă de rază R este tăiată de un plan la distanţa de $\frac{R}{3}$ de centrul sferei. Se cere aria cercului format de secţiunea făcută în sferă.

17.18. Ştiind că volumul sferei este $\frac{4\pi R^3}{3}$, unde R este raza sferei, să se arate că volumul sferei mai poate fi dat de $\frac{\pi D^3}{6}$, unde D este diametrul sferei.

17.19. De cîte ori este mai mic volumul Lunii decît al Pămîntului, dacă raza Lunii este 0,27 din raza Pămîntului, ambele corpuri cereşti fiind socotite sferice.

17.20. Acoperişul unei clădiri este făcut din ţiglă, fiind înclinat cu 45° faţă de planul orizontal şi este format din două trapeze isoscele, avînd baza mare de 14 m, iar baza mică de 8 m, şi două triunghiuri isoscele. Să se afle cîte ţigle sînt necesare dacă intră 7 ţigle pe metru pătrat de acoperiş.

17.21. Fie un cub de muchie a, R raza sferei care trece prin cele 8 colţuri ale cubului, şi r raza sferei tangentă celor 6 feţe ale cubului.

Să se afle raportul dintre aria sferei mari şi aria sferei mici.

17.22. O piramidă are vîrful în V şi ca bază rombul $ABCD$ cu latura de 5 cm şi diagonala mică de 6 cm. Înălţimea piramidei este jumătate din diagonala mare a bazei şi are piciorul în mijlocul ei.

a) Să se afle volumul piramidei

b) Să se calculeze lungimile muchiilor laterale

c) Să se arate că muchiile laterale ale piramidei care trec prin extremităţile diagonalei mari sînt perpendiculare.

Concursul de matematică, clasa a VIII-a, Ploieşti, 1966

17.23. Înălţimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este egală cu 6 cm iar diagonala piramidei (în secţiunea diagonală) este egală cu 10 cm, muchia laterală face cu planul bazei un unghi de 45°.

a) Să se calculeze aria secţiunii diagonale

b) Să se afle volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, Deva, 1966

Scanned with OKEN Scanner

17.24. Se consideră o piramidă hexagonală regulată avînd aria bazei $54\sqrt{3}$ cm² şi înălţimea de 4 cm.

a) Să se afle aria laterală a piramidei date.

b) Să se afle aria laterală a piramidei triunghiulare care are acelaşi vîrf cu piramida hexagonală şi ca bază triunghiul ce se obţine unind din două în două vîrfurile exagonului de la bază.

c) Presupunînd că piramida triunghiulară a fost confecţionată din cea hexagonală, să se exprime în procente deşeurile.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, Banat, 1966

17.25. Într-un paralelipiped muchiile bazei sînt $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, iar diagonala paralelipipedului face cu baza un unghi de 45°.

a) Să se calculeze înălţimea şi diagonala paralelipipedului

b) Să se calculeze aria totală şi volumul paralelipipedului.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, Tg. Mureş, 1966

17.26. Se dă o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$. Latura bazei este de 2 dm, iar diagonala AC' a prismei este de 4 dm.

a) Să se arate că triunghiul ACC' este isoscel.

b) Să se calculeze aria totală a prismei.

c) Presupunînd că prisma este metalică şi că prin topire se transformă în alta a cărei bază este un dreptunghi cu lungimea de 2 dm şi lăţimea de $\sqrt{2}$ dm, să se arate că înălţimea acestei prisme este egală cu diagonala prismei iniţiale.

Concursul de matematică, cl. a VIII-a, Banat, 1966

17.27. Fie un paralelogram de laturi consecutive a, b şi înălţimile corespunzătoare h şi k. Rotind paralelogramul în jurul laturii a se obţine corpul de volum V, rotind paralelogramul în jurul laturii b, se obţine corpul de volum V_1. Se cere:

a) Să se calculeze volumul V cu ajutorul lui a şi h precum şi volumul V_1 cu ajutorul lui b şi k şi să se interpreteze rezultatul.

b) Să se arate că există relaţia

$$\frac{V}{V_1} = \frac{b}{a}$$

Concursul de matematică, clasa a VIII-a, 1966

Capitolul XVIII

18.1. Să se construiască un unghi de 52°30′ numai cu rigla şi compasul.

18.2. Se dă un triunghi oarecare ABC. Prelungim latura AB dincolo de B pînă în C_1, astfel că $AC_1 = BC + CA$; prelungim latura BC dincolo de C pînă în A_1, astfel că $BA_1 = BA = AC$; prelungim latura AC dincolo de A pînă în B_1, astfel

Scanned with OKEN Scanner

că $CB_1 = CB + BA$. Notăm cu P şi P_1 perimetrele triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$. Să se arate că:

$$\frac{3}{2} < \frac{P_1}{P} < 3.$$

G.M.B., 1956, pag. 734

18.3. Dacă se unesc mijloacele E,F ale laturilor AB şi CD ale unui paralelogram cu vîrfurile D şi B, aceste drepte vor împărţi diagonala AC în trei părţi egale.

18.4. Înălţimile unui paralelogram sînt proporţionale cu 2 şi 3. Perimetrul lui este de 40 cm, iar un unghi este de 30°. Să se calculeze laturile paralelogramului şi aria.

18.5. Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A. Perpendicularele în B şi C pe ipotenuză retaie laturile AC, AB în B', C'. Fie şi AA' înălţimea din A. Notăm $BC = a$, $AC = b$. Să se arate că:

$$AA' = \frac{bc}{a};\ BB' = \frac{ac}{b};\ CC' = \frac{ab}{c}.$$

G.M.B., 1961, pag. 245

18.6. Ştiind că se pot construi cu rigla şi compasul poligoane regulate cu 3,4 şi 5 laturi să se arate cum se poate construi un unghi de 123° şi un unghi de 18°.

18.7. Să se demonstreze că orice triunghi cu toate unghiurile ascuţite are două unghiuri a căror diferenţă este mai mică decît 30°.

18.8. Într-un trapez oarecare $ABCD$ laturile paralele fiind AB şi CD se ia un punct M pe latura AD. Paralela dusă prin A la MC taie latura BC în N. Să se arate că dreptele ND şi MB sînt paralele.

18.9. Prin două puncte date ale unui cerc să se traseze două coarde paralele, astfel ca suma lor să fie egală, cînd este posibil, cu un segment dat.

18.10. Într-un dreptunghi $ABCD$, bisectoarea unghiului BAD taie diagonala BD în E, iar latura BC în F. Ştiind că paralela dusă din E la AB taie pe AC în G, să se arate că dreptele GF şi BD sînt perpendiculare.

G.M.B., 1958, pag. 722

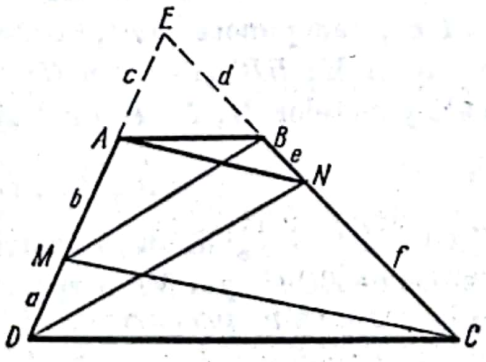


Fig. 18.8.

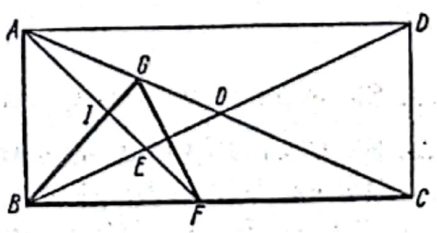


Fig. 18.10

18.11. Bisectoarea unghiului C a triunghiului ABC întîlneşte latura AB în M. Bisectoarea MN a unghiului BMC este paralelă la AC.

a) Să se determine unghiurile triunghiurilor isoscele care îndeplinesc această condiţie.

b) Cîte triunghiuri dreptunghice îndeplinesc condiţia dată şi ce mărime au unghiurile lor.

G.M.B., 1963, pag. 629

18.12. În dreptunghiul $ABCD$ bisectoarea unghiului B şi diagonala ce pleacă din acest vîrf fac între ele un unghi de 15°. Bisectoarea întîlneşte diagonala AC în P şi latura DC în E. Să se arate că triunghiurile COE şi POE sînt isoscele, O fiind intersecţia diagonalelor.

18.13. Să se construiască un triunghi dreptunghic, cunoscînd un unghi ascuţit şi distanţa între picioarele înălţimii şi bisectoarei duse din vîrful unghiului drept pe ipotenuză.

G.M.B., 1958, pag. 722

18.14. Într-un triunghi ABC se dă $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle \frac{A}{2}$.

a) Să se calculeze unghiurile acestui triunghi.

b) Paralela dusă prin C la bisectoarea AA_1 întîlneşte prelungirea lui BA în D. Să se arate $BC = CD$ şi $AD = AB$.

c) DA_1 taie pe AC în E. Să se arate că BF trece prin E, unde F este mijlocul lui CD.

G.M.B., 1960, pag. 563

18.15. Se consideră un patrulater $ABCD$ cu unghiul D egal cu 90°, iar diagonala AC este bisectoarea unghiului A şi C. Se prelungesc laturile AD şi BC pînă se întîlnesc în E. Cunoscîndu-se unghiul $A = 70°$ să se calculeze unghiul B şi unghiul E al triunghiului ABE.

G.M.B., 1960, pag. 60

18.16. Un trapez $ABCD$ are latura AB perpendiculară pe bază. Se dă $AB = 12$ cm, $BC = 17$ cm şi $AD = 22$ cm. Fie M mijlocul laturii AB. Să se calculeze distanţa de la M la CD.

G.M.B., 1961, pag. 244

18.17. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului echilateral ABC se iau punctele A', B', C' în aşa fel încît $AC' = BA' = CB'$, iar punctele A', B', C' să fie pe laturi, fie pe prelungiri. AA' şi BB' se taie în M; BB' şi CC' în N; CC' şi AA' în P. Să se găsească locurile geometrice ale punctelor M, N, P, cînd A', B', C' variază.

G.M.B., 1960, pag. 115

18.18. Se dă un triunghi echilateral ABC cu o latură egală cu 8 metri. Din mijlocul M al laturii AB se duce MN perpendicular pe BC şi apoi NP perpendicular pe AC şi PQ perpendicular pe AB. Să se calculeze MN, NP, PQ şi QM.

G.M.B., 1959, pag. 622

Scanned with OKEN Scanner

18.19. Să se calculeze laturile trapezului isoscel circumscris cercului cu raza de 2 cm, cunoscînd că aria trapezului este de 20 cm².

G.M.B., 1962, pag. 617

18.20. Într-un cerc se înscrie un triunghi oarecare ABC. Perpendiculara dusă în C pe BC taie cercul în M, iar perpendiculara dusă tot în C, însă pe AC taie cercul în punctul N. Să se demonstreze că dreptele MN și AB sînt paralele. Dacă raza cercului este 20 cm și $BC = 32$ cm, să se calculeze perimetrul și înălțimile triunghiului BMC.

18.21. Se dă trapezul oarecare $ABCD$. Să se ducă o paralelă la baza AB care să intersecteze laturile AD, BC, respectiv în M și N, astfel ca să existe relația $AM + BN = MN$.

G.M.B., 1959, pag. 495

18.22. Două drepte paralele (D_1) și (D_2) sînt tăiate de o secantă oarecare în punctele M și N. Pe cele două paralele așezăm, în sensuri opuse, segmentele $MP = MN$ și $NQ = MN$. Să se demonstreze că:

a) segmentele NP și MQ sînt egale;

b) segmentele NP și MQ sînt paralele;

c) segmentele NP și MQ sînt bisectoarele unghiurilor cu vîrfurile în N, respectiv M;

d) înălțimile care pornesc din vîrfurile M, respectiv N sînt paralele.

G.M.B., 1959, pag. 435

18.23. În cercul de rază R se duce diametrul AOB și latura DE a pătratului înscris în acest cerc, perpendiculară pe AB.

a) Să se construiască cercul C care are ca diametru pe DE și să se demonstreze că trece prin O.

b) Dreapta AD taie cercul C în punctul F. Să se arate că triunghiul AEF este isoscel.

c) Să se calculeze laturile triunghiului AEF, cunoscînd raza R a cercului O de 5 cm.

18.24. Un ferăstrău circular face 180 rotații pe minut și taie la fiecare rotație cîte 9 mm. Să se afle în cît timp va tăia în lungime o grindă de lemn lungă de 7 metri. Care este viteza unui dinte de ferăstrău, știind că pînza ferăstrăului are forma unui cerc cu raza de 46 cm.

18.25. Diagonalele unui trapez isoscel formează un unghi ascuțit de 60°. Să se demonstreze că:

a) patrulaterul care are laturile paralele cu diagonalele trapezului și trec prin vîrfurile acestuia este un romb;

b) o diagonală a acestui romb este egală cu diagonala trapezului.

G.M.B., 1960, pag. 308

18.26. Să se determine viteza de tăiere la efectuarea unei găuri de diametrul 12 mm dacă burghiul face $n = 360$ ture pe minut.

Scanned with OKEN Scanner

18.27. Un trapez isoscel are baza mare de trei ori cît baza mică, iar înălțimea dublul bazei mici. Să se demonstreze că diagonalele sînt perpendiculare.

18.28. În triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept în A ducem înălțimea AD și mediana AE. Din D ducem o perpendiculară pe AE și pe această perpendiculară ducem perpendicularele BB_1 și CC_1. Să se arate că $2DE = BB_1 + CC_1$, știind că $AC > AB$.

18.29. Viteza periferică a pietrei unui polizor este de 1 000 metri pe minut, iar turația axului polizorului este de 15 rotații pe secundă. Să se afle diametrul pietrei de polizor.

18.30. Se dă un dreptunghi $ABCD$ în care $BC = 2AB$. Perpendiculara AO pe BD taie latura BC în E. Să se arate că $BC = 4BE$ și că punctul O se află pe dreapta ce unește mijloacele segmentelor BE și AD.

18.31. În interiorul unghiului A de 75° se duce semidreapta AM care împarte unghiul în două unghiuri de 45° și de 30°. Prin M să se ducă o dreaptă care să taie laturile unghiului dat A în punctele B și C, astfel că $BM = MC$. Caz numeric $AM = 6$ cm.

18.32. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90°$). Prin vîrful A se duce o paralelă la ipotenuză, iar din vîrful B și C se duc perpendicularele BD și CE pe paralela de mai sus:

a) să se arate că triunghiurile ABD și ACE sînt asemenea cu triunghiul dat;

b) să se calculeze laturile lor, știind că $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm;

c) prin D se construiește o dreaptă perpendiculară pe AB, care întîlnește ipotenuza în G. Să se demonstreze că GE este perpendiculară pe AC;

d) să se calculeze aria dreptunghiului $ALGM$, unde L și H sînt respectiv punctele de intersecție ale dreptelor (AB și DG) și (AC și GE).

18.33. Se dă triunghiul oarecare ABC. Ducem înălțimea AD, iar din D ducem o perpendiculară pe AC care întîlnește bisectoarea unghiului DAC în O. Să se arate că DOM este isoscel, unde M este piciorul bisectoarei duse.

18.34. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu a. Pe diagonala AC se ia punctul P, astfel încît $PC = \frac{AC}{4}$. Fie E intersecția lui BP cu CD, O centrul pătratului și M intersecția lui BP cu perpendiculara din O pe BC:

a) să se calculeze CE,

b) să se arate că triunghiul OEM este isoscel.

18.35. Se consideră un triunghi oarecare ABC. Pe latura BC se ia un punct oarecare M și se construiesc simetricele P și Q ale lui M față de mijloacele laturilor AB și AC. Să se demonstreze că:

a) PA și AQ sînt în prelungire;

b) să se demonstreze că $PQ = BC$

c) În ce poziții trebuie să fie luat punctul M, astfel ca în acele cazuri triunghiurile MPQ și ABC să fie egale?

Scanned with OKEN Scanner

18.36. Un triunghi dreptunghic are catetele $AB = 120$ cm, $AC = 35$ cm. Să se afle: înălțimea dusă din unghiul drept, mediana corespunzătoare ipotenuzei și distanțele centrului de masă la laturile triunghiului.

18.37. Un trapez dreptunghic cu diagonalele perpendiculare între ele are AB baza mică, CD baza mare și AD latura neparalelă perpendiculară pe baze. Să se arate că:

$$BD^2 \cdot DC = AC^2 \cdot AB.$$

G.M.B., 1963, pag. 693

18.38. În vîrfurile dreptunghiului $ABCD$ ca centre se construiesc cercuri care nu se intersectează. Are loc relația $R_A + R_C = R_B + R_D$. La cercurile A și C, B și D se duc tangentele exterioare comune. Să se demonstreze că în patrulaterul obținut prin intersecția tangentelor se poate înscrie un cerc.

La Olimpiada cl. a VII-a

18.39. Un trapez este format din jumătatea unui hexagon regulat. Intersecțiile bisectoarelor acestui trapez sînt vîrfurile unui patrulater. Să se arate că acest patrulater are diagonalele perpendiculare, că aria lui este de 9 ori mai mică decît aria trapezului dat. Să se exprime laturile și diagonalele acestui patrulater știind că baza mică este de a metri.

18.40. Două cercuri cu centrele în O_1 și O_2 cu raze, respectiv $R_1 = 2$ cm și $R_2 = 3$ cm, sînt tangente exterioare în punctul T. Fie T_1 și T_2 punctele de tangență a unei tangente exterioare celor două cercuri. Prin centrul de greutate al triunghiului TT_1T_2 să se ducă o secantă care să determine coarde egale în cele două cercuri.

G.M.B., 1964, pag. 86

18.41. Să se demonstreze că cercurile descrise pe două din laturile unui triunghi, ca diametre, se mai intersectează pe latura a treia sau pe prelungirea acesteia.

18.42. Să se arate că în orice triunghi există relația:

$$ab = p(p - c) + (p - a)(p - b),$$

a, b, c, fiind laturile triunghiului, iar p semiperimetrul.

G.M.B., 1958, pag. 680

18.43. Într-un triunghi oarecare ABC se notează cu p semiperimetrul său, cu x, y, z înălțimile și cu S aria triunghiului. Să se arate că:

$$S = \frac{xyzp}{xy + yz + zx}.$$

18.44. Într-un triunghi ABC, unghiul A este cu 20° mai mare decît jumătatea unghiului C, iar unghiul B cu 50° mai mic decît dublul unghiului C. Care sînt mărimile celor trei unghiuri?

18.45. Într-un triunghi cu baza de 16 cm se duce o paralelă la bază, care are o lungime de 12 cm și se găsește la o distanță de 75 mm de ea. Să se afle aria triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

18.46. Într-un trapez isoscel baza mică este de 15 cm, înălțimea cu 13 cm mai mică decît baza mare și linia mijlocie de 20 cm. Se cere perimetrul și aria trapezului.

18.47. Pentru irigatul terenului unei cooperative agricole de producție, destinat culturilor de legume, care are forma unui trapez, s-a săpat un șanț paralel cu bazele și care are o lungime de 2,5 km. Știind că dimensiunile trapezului sînt: baza mare de 3,2 km, baza mică de 2 km și înălțimea de 960 m, să se afle la ce depărtare de bază se găsește săpat șanțul.

18.48. O tarla a unei cooperative agricole de producție are forma unui trapez cu baza mare de 32 hm, baza mică de 22 hm și înălțimea de 875 m. Tarlaua este despărțită în două parcele printr-o paralelă la baze, dusă la distanța de 21 dam de baza mare. Să se afle ariile celor două parcele.

18.49. În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu E mijlocul laturii BC, iar cu F și G două puncte pe AB, astfel că $AF = FG$. Dreapta EF întîlnește pe AC în M, iar dreapta CG întîlnește pe AD în N. Să se arate că $AM = MN$.

G.M.B., 1965, pag. 124

18.50. Fie P, Q, R, S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA ale patrulaterului $ABCD$ și P', Q', R', S' centrele pătratelor construite în exterior pe aceleași laturi. Să se arate că dacă M și N sînt mijloacele diagonalelor AC, BD, atunci $MP' = MQ'$; $MR' = MS'$, $NP' = NS'$ și $NR' = NQ'$.

Să se exprime aria $ABCD$.

G.M.B., 1965, pag. 126

18.51. Se dă triunghiul ABC. Pe latura AB se ia punctul M, astfel că segmentul AM să fie 3/8 din latura AB, iar pe latura BC se ia punctul N, astfel ca segmentul BN să fie 4/9 din latura BC. Să se fixeze pe latura AC un punct P, astfel ca aria patrulaterului $AMNP$ să reprezinte 30% din aria triunghiului ABC.

G.M.B., 1965, pag. 167

18.52. Muchiile unui paralelipiped dreptunghic care pleacă dintr-un vîrf sînt de 3,4 și 12 m. Să se afle aria totală, volumul și diagonala paralelipipedului.

18.53. Un cilindru circular cu raza 100 mm a fost tăiat la capete astfel că secțiunea făcută prin axa cilindrului are forma unui trapez cu laturile paralele de 1 200 mm și 1 600 mm. Să se afle volumul.

18.54. Un coș de fabrică are forma unui trunchi de con cu baza mare de 3 m² și baza mică de 1m², iar înălțimea de 20 m. Se cere volumul.

18.55. Un pahar cu forma unui trunchi de con are perimetrul bazei mici de 20 cm, perimetrul bazei mari de 30 cm, iar generatoarea de 18 cm. Să se afle aria laterală și volumul.

18.56. Un butoi se poate socoti prin aproximație prin lipsă ca format din două trunchiuri de con egale, avînd bazele mari suprapuse. Să se afle volumul unui astfel de butoi care are diametrul fundului de 120 cm, diametrul la mijloc în dreptul vranei de 180 cm, iar distanța între funduri de 360 cm.

Scanned with OKEN Scanner

18.57. O sferă are aria de 10 m². Se cere volumul sferei.

18.58. O secțiune într-o sferă cu raza de 2 m este la 1,2 m distanță de centrul sferei. Un con tangent sferei are ca bază secțiunea în sferă. Să se afle aria calotei formată de secțiunea făcută în sferă și aria laterală a conului format.

18.59. Diametrul planetei Marte fiind 6 770 km, al Pământului 12 740 km, să se afle de cîte ori este mai mare masa Pământului decît a planetei Marte știind că densitatea planetei Marte este în medie de 4 g/cm³, iar a Pământului 5,5 g/cm³.

18.60. Dacă masa Soarelui este de 330 000 ori mai mare ca a Pământului, diametrului Soarelui este de 109 ori mai mare decît al Pământului, iar densitatea Pământului este în medie 5,5 g/cm³, să se afle densitatea medie a Soarelui.

18.61. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de 4 dm, perimetrul bazei mici de 12,1 dm și înălțimea bazei mari de 9 dm. Se cere:

a) Volumul trunchiului de piramidă.

b) Unghiul format de muchiile laterale cu baza.

c) Aria totală a trunchiului.

18.62. Într-un cilindru se duce un plan paralel cu generatoarea. El taie din cercul bazei un arc de 120°. Lungimea generatoarei este de 10 cm, iar distanța de la centrul cercului de bază la planul secant este 2 cm. Să se afle:

a) aria secțiunii,

b) aria totală și volumul cilindrului.

Concursul de matematică, cl. *a* VIII-*a*, Tg. Mureș, 1966

18.63. Într-un triunghi ABC cu unghiul A de 90°, cu $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm, se duce înălțimea AD și mediana AM; iar în M se duce perpendiculara pe AM care întîlnește prelungirea lui AD în N.

a) Să se afle perimetrul triunghiului MND.

b) Triunghiul ABC are ipotenuza BC paralelă cu o dreaptă xy și situată la o depărtare de 1,5 cm de ea. Să se afle aria și volumul corpului născut prin rotirea triunghiului în jurul dreptei xy.

Concursul de matematică, clasa *a* VIII-*a*, Deva, 1966

18.64. Secțiunea diagonală a unui vas în formă de piramidă patrulateră regulată este un triunghi dreptunghic cu aria de 18 cm². Vasul fiind cu vîrful în jos, se toarnă mercur pînă la jumătate din înălțimea lui. Se cere:

a) aria laterală a vasului.

b) Masa mercurului din vas știind că

$$\rho_{Hg} = 13{,}6\,\frac{g}{cm^3}.$$

Concursul de matematică, clasa *a* VIII-*a*, Craiova, 1966

18.65. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi dreptunghic ABC, iar înălțimea VA cade în vîrful unghiului drept A al triunghiului ABC. Se dă:

$AB = 24$ cm, $BC = 51$ cm, $VA = 6$ dm. Prin punctul D al înălțimii VA situat la 4 dm de punctul A se duce un plan paralel cu baza piramidei și se notează

Scanned with OKEN Scanner

cu E și F punctele în care acest plan taie celelalte două muchii laterale ale piramidei.

a) Să se arate că perimetrul triunghiului DEF este egal cu $\frac{2}{3}$ din înălțimea piramidei.

b) Să se afle volumul corpului care rămîne dacă se îndepărtează piramida $VDEF$.

c) Să se arate că $\operatorname{tg}(ACV) + \operatorname{tg}(ABV) + \frac{1}{6} = 4$.

Concursul de matematică, clasa a VIII-a Ploiești, 1966.

18.66. În planul P, se dă un triunghi ABC dreptunghic în A, avînd unghiul C egal cu 30° și ipotenuza egală cu a cm. Se construiește cercul de centru O_1 tangent în B ipotenuzei BC și trecînd prin A; de asemenea se construiește cercul de centru O_2 tangent în C ipotenuzei BC și care trece tot prin A.

a) Să se afle aria laterală și volumul cilindrului circular drept, avînd ca bază cercul cu centrul în O_1, iar înălțimea egală cu lungimea segmentului O_1O_2, generatoarele fiind perpendiculare pe planul P.

b) Să se afle aria laterală și volumul prismei drepte care are ca bază exagonul regulat înscris în cercul cu centrul O_2, iar înălțimea egală cu $\frac{a}{2}$, muchiile fiind perpendiculare pe planul P.

c) Să se afle raportul celor două volume și să se arate că valoarea nu depinde de a.

Concursul de matematică, cl. VIII, 1966

18.67. Dacă notăm cu V volumul unui cilindru, cu S aria lui totală iar cu A aria laterală, să se arate că între aceste elemente există relația

$$8\pi V^2 = A^2(S - A)$$

18.68. Se dă o piramidă triunghiulară $SABC$ în care $SA = SB = SC = a$, $\sphericalangle ASB = 60°$, $\sphericalangle ASC = 90°$ și $\sphericalangle BSC = 120°$. Să se calculeze:

a) Laturile triunghiului ABC și să se arate că este dreptunghic în A.

b) Aria totală a piramidei.

c) Volumul piramidei

Concursul de matematică, cl. *a* VIII-*a*, București, 1971

18.69. Un bazin are forma unui trunchi de piramidă regulată așezat cu baza mică orizontală, jos fiind fundul bazinului și are forma unui pătrat cu latura de 2 metri. Baza mare are aria de patru ori cît baza mică, iar aria laterală este de 6 ori cît aria bazei mici. a) Se cere volumul bazinului. b) Să se calculeze distanța de la un vîrf al bazei mari pînă la vîrful opus al bazei mici. (Diagonala trunchiului de piramidă).

18.70. Într-o prismă patrulateră regulată aria bazei este egală cu 16. Prin diagonala bazei se duce un plan care formează cu planul bazei un unghi de 60°. Să se afle aria secțiunii obținute, precum și volumul piramidei care se formează. Dacă înălțimea prismei este 8 să se arate că $\frac{V_1}{V} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{24}$ unde V_1 este volumul piramidei, iar V este volumul prismei.

Concurs la clasa a VIII-a, Zalău, 1968.

Scanned with OKEN Scanner

18.71. În vîrful A al exagonului regulat $ABCDEF$, avînd latura egală cu 8 cm, se duce perpendiculara $AG = 6$ cm pe planul acesteia.

a) Să se calculeze distanţele punctului G faţă de vîrfurile exagonului.

b) Să se arate că triunghiul GCD este dreptunghic.

c) Dacă x este unghiul diedru format de planul triunghiului GBF cu planul exagonului, să se afle tg x.

d) Să se calculeze volumul şi aria totală a piramidei triunghiulare $GABF$.

Concurs la clasa a VIII-a, Prahova, 1969.

18.72. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este de 52 cm, iar înălţimea paralelipipedului de 16 cm. Se vor nota: lungimea bazei cu AB, lăţimea cu $BC = 10$ cm şi muchiile laterale respectiv cu AA', BB', CC', DD'. Prin BC se duce un plan care taie muchia AA' în M şi muchia DD' în N.

a) Să se demonstreze că patrulaterul $BCNM$ este un dreptunghi.

b) Să se afle volumul corpului limitat de baza $ABCD$ şi secţiunea $BCNM$, ştiind că aria acesteia este de 200 cm^2.

c) Să se afle raportul volumelor celor două corpuri care compun paralelipipedul dreptunghic dat.

d) Se cere aria totală a celor două corpuri care compun paralelipipedul dreptunghic dat, luate separat.

Concurs la clasa a VIII-a, Arad, 1969.

18.73. Se consideră un triunghi dreptunghic $ABC (A = 90°)$, ale cărui catete sînt $AB = 20$ cm, $AC = 15$ cm, iar pe perpendiculara în A la planul acestui triunghi se ia punctul M astfel ca segmentul AM să fie egal cu mediana AA', $(A' \in BC)$.

a) Să se calculeze volumul piramidei $ABCM$.

b) Să se afle aria laterală a acestei piramide.

c) Să se calculeze distanţa de la punctul A la planul (MBC).

Concurs la clasa a VIII-a, jud. Dîmboviţa, 1971.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIX

Din subiectele date la lucrările scrise ale concursului de admitere în licee

19.1. Două combine, lucrînd împreună, pot strînge recolta de pe un teren în 6 zile. După 4 zile de lucru în comun, una din combine a fost mutată în altă parte. Din această cauză, a doua combină a trebuit să lucreze 5 zile singură pentru a putea strînge toată recolta.

Să se afle în cîte zile s-ar fi putut strînge recolta cu fiecare din aceste combine în parte.

(*anul* 1954).

19.2. Să se efectueze:

$$\frac{1:4\frac{4}{11}+1\frac{13}{30}-3\frac{21}{49}:3}{14{,}4-9{,}45:0{,}9}+\frac{1}{16}:\left(38{,}75:77\frac{1}{2}\right).$$

(*anul* 1954).

19.3. Două bucăţi de zefir pentru cămăşi, de aceeaşi calitate, valorează una 238 lei şi alta 182 lei. Dacă preţul metrului s-ar micşora ou 2 lei, prima bucată ar costa cu 48 lei mai mult decît a doua. Care este preţul unui metru de zefir şi cîţi metri are fiecare bucată?

(*Baia Mare*, 1956).

19.4. Să se efectueze:

$$\frac{\left(2\frac{3}{7}+1{,}3\right):6\frac{3}{14}+5\frac{80}{31}\cdot\left(4{,}2-3\frac{7}{11}\right)}{4\frac{4}{5}:5{,}7\cdot1\frac{3}{16}-\left(3\frac{1}{7}-2{,}8\right)\cdot1\frac{1}{6}}$$

(*Ploieşti*, 1957).

Scanned with OKEN Scanner

19.5. O cooperativă agricolă de producție a vîndut 3 000 chintale de cereale și anume: orz, secară și grîu, primind: pentru orz 140 000 lei, pentru secară 120 000 lei și pentru grîu 84 000 lei. Știind că 6 chintale orz costă cît 5 chintale secară și 7 chintale secară costă cît 6 chintale grîu, se cere să se afle cantitatea în chintale și costul unui chintal pentru fiecare fel de cereale.

(*Iași*, 1957).

19.6. Să se efectueze:

$$\frac{(20{,}061 - 9{,}986)\cdot\left[7{,}625 + 11 - \left(9\frac{48}{125} + 3{,}116\right)\right]}{0{,}3675 : \frac{7}{50} - 1{,}7 + 0{,}15 \cdot 4\frac{2}{3}}$$

(*Iași*, 1957).

19.7. Se amestecă o anumită cantitate de minereu de calitatea I, care conține 70% fier, cu altă cantitate de minereu de calitatea a II-a cu 60% fier și se obține un amestec de 64% fier. Dacă s-ar adăuga 20 tone la primul minereu și s-ar scădea 20 tone la cel de al doilea minereu, s-ar obține un amestec cu 65% fier. Să se afle cîte tone s-au luat din fiecare fel de minereu.

(*Iași*, 1957).

19.8. Să se efectueze:

$$4\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{5\frac{1}{60}\cdot\frac{1+\frac{1}{4}}{3\frac{7}{12}}}{5\frac{9}{40} - 3\frac{5}{6} - \frac{5}{9}} - \frac{3\frac{13}{15} : \frac{14}{15} + 6\frac{53}{56} - 2{,}375}{8\frac{3}{7}\cdot 0{,}25 + 2{,}25}\right)$$

(*Iași*, 1957).

19.9. Două brigăzi de țărani cooperatori trebuie să strîngă recolta în 12 zile. După ce au lucrat 9 zile împreună, prima brigadă a primit altă însărcinare și brigada a doua a terminat lucrul în 5 zile. În cît timp ar fi putut strînge recolta fiecare brigadă în parte?

(*București*, 1957).

19.10. Să se simplifice fracția:

$$\frac{x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y}{x^2 - y^2 - 1 + 2y}.$$

(*București*, 1957).

19.11. Un biciclist a mers într-o zi, din distanța pe care o avea de parcurs, 12 km, iar a doua zi $\frac{1}{4}$ din ceea ce i-a mai rămas. După aceasta, i-au mai rămas de parcurs cu 2 km mai mult decît a parcurs în cele două zile. Ce distanță a avut de parcurs bicicliștul în total?

(*București*, 1957).

Scanned with OKEN Scanner

19.12. Să se efectueze:

$$\frac{\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}+\left(4{,}5-3\frac{4}{7}\right)\cdot\sqrt{44\frac{133}{169}}.$$

(*București*, 1957).

19.13. Pentru a hrăni 10 cai și 14 vaci se dădeau cîte 180 kg de fîn pe zi. Mărindu-se rația de fîn, pentru cai cu 25%, iar pentru vaci cu $33\frac{1}{3}\%$, s-au dat cîte 232 kg de fîn pe zi. Cîte kilograme de fîn se dădeau pe zi, la început, pentru un cal și cîte pentru o vacă?

(*București*, 1957).

19.14. Doi concurenți, participînd la un concurs, au răspuns corect, primul la 8 întrebări, al doilea la 6 întrebări. Suma primită de fiecare, drept premiu, este proporțională cu numărul de întrebări la care a răspuns corect. Ce sumă a primit fiecare, dacă $\frac{1}{6}$ din suma primită de al doilea, mărită cu 25% din suma primită de primul, este cu 1 100 lei mai mică decît suma împărțită, drept premiu, celor doi concurenți?

(*Bacău*, 1958).

19.15. Un muncitor face drumul de acasă pînă la uzină, pe jos, în 50 de minute, iar pe bicicletă, în 0,3 ore. La ce distanță de uzină locuiește acest muncitor, dacă el face, într-o oră, pe bicicletă, cu 8 km mai mult decît pe jos?

(*Baia Mare*, 1958).

19.16. Să se efectueze:

$$\frac{\left(17\frac{1}{2}-8{,}25\cdot\frac{10}{11}\right)\cdot\left(11\frac{2}{3}:2\frac{2}{9}+3{,}5\right)}{\left(17{,}25:2{,}3-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(14\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right):\frac{104}{175}}:\frac{7}{33}.$$

(*Baia Mare*, 1958)

19.17. Pe o remorcă s-au încărcat 330 de scînduri de brad și de fag. Scîndurile de fag cîntăresc cu 220 kg mai puțin decît scîndurile de brad. Cunoscînd că o scîndură de brad cîntărește 5,6 kg, iar o scîndură de fag 9,2 kg, să se afle cîte scînduri de brad și cîte de fag s-au încărcat pe remorcă.

(*Hunedoara*, 1958).

19.18. Două mobile, A și B, pornind din același punct, se mișcă cu viteze diferite, pe un cerc cu lungimea de 999 m. Dacă se mișcă în același sens, mobilele se întîlnesc după 37 minute, iar dacă se mișcă în sensuri contrare, se întîlnesc după 22 minute și 12 secunde. Să se calculeze raportul vitezelor celor două mobile, presupunînd că fiecare din ele se mișcă uniform, cu viteza constantă.

(*Hunedoara*, 1958).

Scanned with OKEN Scanner

19.19. Din două mine se obţine minereu de fier: un fel de minereu conţine 72% fier, iar celălalt, 58%. Se amestecă o cantitate anumită din prima mină cu o cantitate din mina a doua şi se obţine minereu care conţine 62% fier. Dacă s-ar lua din fiecare minereu de fier cu 15 tone mai mult, cantitatea de minereu, care s-ar obţine, ar conţine 63,25% fier. Să se afle cîte tone s-au luat din fiecare minereu.

(*Piteşti*, 1958).

19.20. Viteza unui tren personal este cu 10 km/oră mai mare decît viteza unui tren de marfă. Pentru a parcurge distanţa dintre două localităţi, trenului personal îi trebuie cu 3 ore mai puţin decît trenului de marfă, iar unui tren accelerat, a cărui viteză este cu 5 km/oră mai mare decît a trenului personal, îi trebuie, pentru aceeaşi distanţă, cu o oră mai puţin decît trenului personal. Se cere viteza fiecărui tren şi distanţa dintre cele două localităţi.

(*Piteşti*, 1958).

19.21. În depozitul unei secţii de confecţii există 240 m stofă de calitatea I şi 260 m stofă de calitatea a II-a, în valoare totală de 104 200 lei. S-au folosit pentru confecţionarea unor costume, 30% din stofa de calitatea I şi 45% din cea de calitatea a II-a. Ştiind că stofa de calitatea a II-a necesară pentru confecţionarea acestor costume a costat cu 1 890 lei mai mult decît aceea de calitatea I folosită în acelaşi scop, să se afle cît costă un metru de stofă din fiecare calitate.

(*Bucureşti*, 1958).

19.22. Doi muncitori au produs împreună, într-o săptămînă, 360 de piese. În săptămîna următoare, primul muncitor mărindu-şi productivitatea cu 25% în primele 4 zile şi cu 50% în următoarele 2 zile, iar al doilea, cu $\frac{1}{6}$ faţă de cît a produs zilnic în prima săptămînă, cei doi muncitori au produs fiecare acelaşi număr de piese. Cît a produs zilnic, în prima săptămînă, fiecare muncitor?

(*Bucureşti*, 1958).

19.23. Să se găsească valoarea lui x, care satisface egalitatea:

$$\left\{\left[\frac{\left(\frac{3}{10}\cdot x+2\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}}+5\frac{5}{8}\right]:\frac{219}{\sqrt{144}}\right\}:2{,}5=\frac{1}{5}.$$

(*Bacău*, 1959).

19.24. Pe şantierul de irigarea terenurilor de la Negoi-Rast, într-o zi s-au prezentat 54 de tineri voluntari. Ei au fost împărţiţi în două brigăzi de muncă. După o săptămînă de lucru, 2 tineri din prima brigadă au trecut în brigada a doua. Acum, numărul tinerilor din brigada a doua este 80% faţă de numărul celor din prima brigadă. Cîţi tineri sînt în fiecare brigadă?

(*Craiova*, 1959).

Scanned with OKEN Scanner

19.25. Să se efectueze:

$$\frac{0{,}5 - 4\frac{1}{11}\cdot(0{,}1125 - 0{,}0025)}{\left(0{,}175 : 0{,}25 + 1\frac{3}{4}\cdot 4\right) : 1{,}54} + \sqrt{0{,}9801}.$$

(*Craiova*, 1959).

19.26. Două loturi ale unei cooperative agricole de producție au: primul 200 ha și al doilea 45 ha. Să se afle cîte ha se ară pentru cultura grîului din fiecare lot, dacă din primul lot se ară cu 80 ha mai mult decît $\frac{4}{5}$ din al doilea și totuși mai rămîn în primul lot de 5 ori mai multe hectare destinate altor culturi decît în al doilea lot.

(*Craiova*, 1959).

19.27. Să se calculeze:

$$0{,}125 - \frac{5{,}25 - 2\frac{1}{2}\cdot\left(0{,}25 + 2\frac{1}{6}\right) - \sqrt{0{,}1024}}{1\frac{1}{12} - \frac{5}{12}} : 4.$$

(*Craiova*, 1959).

19.28. Două brigăzi ale unei secții de strungărie trebuiau să lucreze zilnic, conform planului, un număr de piese care se găsesc în raportul $\frac{3}{4}$. Prima brigadă a depășit planul cu 15%, iar a doua cu $\frac{3}{20}$ din norma pe zi. Știind că în felul acesta au lucrat împreună 805 piese zilnic, să se afle cîte piese trebuia să lucreze fiecare după plan și care a fost realizarea, în procente, după plan.

(*București*, 1960).

19.29. Să se efectueze:

$$\frac{\left[7{,}25 + 11\frac{3}{4} - \left(3{,}092 + 9\frac{51}{125}\right)\right] : 6\frac{1}{4}}{2\frac{6}{11}\cdot 0{,}275 + 0{,}315 : \frac{3}{25} - 1{,}7} \cdot \frac{1}{\sqrt{0{,}0256}}.$$

(*București*, 1960).

19.30. Două brigăzi de tractoare, avînd împreună 25 de tractoriști, ară în 12 zile 2 040 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 6 ha pe zi, iar unul din a doua 8 ha pe zi. Se cere: a) cîți tractoriști sînt în fiecare brigadă; b) cîtă economie au realizat cele două brigăzi, dacă prima economisește 2 litri de combustibil la ha și a doua 1,5 decilitri la ha și dacă litrul de combustibil costă 0,40 lei.

(*Brașov*, 1961).

Scanned with OKEN Scanner

19.31. Să se efectueze:

$$\frac{\frac{4}{5}\cdot 1{,}25}{0{,}64-\frac{1}{25}}+\frac{\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}-1{,}2\cdot 0{,}5+\frac{7^2}{\sqrt{3\,600}}.$$

(*Braşov*, 1961).

19.32. Să se efectueze:

$$\frac{0{,}71-\frac{1}{4}}{0{,}71+\frac{1}{4}}\cdot\frac{\left(15-9\frac{1}{3}\right):2\frac{5}{9}}{\left(19\frac{2}{3}-11\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{9}{71}}:\frac{\sqrt{289}}{16}.$$

(*Bucureşti*, 1961).

19.33. Doi pionieri au depus la C.E.C. cîte o sumă de bani. Dacă primul ar mai depune $\frac{3}{4}$ din suma sa, iar al doilea ar mai depune 20% din suma sa, atunci ar avea împreună 260 lei. Dacă însă primul ar mai depune $\frac{1}{4}$ din suma sa, iar celălalt ar rămîne cu aceeaşi sumă, atunci ei ar avea la C.E.C. sume egale. Ce sume au la C.E.C. fiecare din cei doi pionieri?

(*Bacău*, 1962).

19.34. Într-o cooperativă agricolă de producţie s-a format o brigadă zootehnică. Numărul bărbaţilor din brigadă este cu 2 mai mare decît numărul femeilor. Dacă ar mai veni 3 bărbaţi şi 2 femei, atunci numărul femeilor ar fi cît $\frac{3}{4}$ din numărul bărbaţilor. Cîţi bărbaţi şi cîte femei sînt în brigadă?

(*Bacău*, 1962).

19.35. Un bloc de locuinţe urma să coste 3 500 000 lei. Prin efortul muncitorilor şi tehnicienilor s-a realizat o economie de 3% la materiale şi de 10% la manoperă, obţinîndu-se o economie de 140 000 lei. Ce sumă era prevăzută pentru materiale şi ce sumă pentru manoperă?

(*Banat*, 1962).

19.36. Să se calculeze expresia:

$$\frac{\left(15\frac{3}{4}-6{,}125:1\frac{3}{4}\right):\left(1\frac{2}{5}\cdot 1\frac{3}{7}+4{,}25\right)}{\left(\sqrt{146{,}41}:1\frac{5}{6}-\frac{2\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^5}\cdot 611\right):\frac{1}{4}}$$

(*Banat*, 1962).

19.37. Conform planului, două uzine producătoare de maşini agricole trebuiau să producă 360 de maşini pe lună. Prima uzină a îndeplinit planul cu 112%, iar a doua cu 110%, astfel încît ambele uzine au realizat împreună 400 de maşini unelte pe lună. Cu cîte maşini a depăşit planul fiecare uzină în parte?

(*Banat*, 1962).

Scanned with OKEN Scanner

19.38. Să se efectueze:

$$\frac{2{,}8+5\frac{1}{2}:\left(3+0{,}2\cdot 2\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7}\cdot 4\frac{1}{5}:8+2{,}45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-\sqrt{1{,}5\,625}}:2{,}8.$$

(*Banat*, 1962).

19.39. Să se afle valoarea numerică a următoarei expresii algebrice:

$$\left(1-\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right):\left(1-\frac{y}{x}\right):\left[\frac{x-y}{x}\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\right],$$

pentru:

$$x=\frac{\left(0{,}305:10-0{,}00205\cdot 10+2\frac{1}{25}:51\right)\cdot 13\frac{1}{3}}{(11{,}9-\sqrt{108{,}16}):0{,}75}+1\frac{2}{3};\ y=\frac{1}{2}.$$

(*Constanța*, 1962).

19.40. Elevii liceelor din Constanța fac practică în producție după cum urmează: 50% din numărul total al elevilor au fost repartizați la întreprinderile agricole de stat și $\frac{3}{10}$ la diferite întreprinderi mai mici. Din numărul celor rămași, $\frac{5}{8}$ au fost repartizați la Șantierul naval, 25 elevi la I.P.A.T., iar restul, care reprezintă $\frac{1}{15}$ din numărul total al elevilor, lucrează la Uzina Ovidiu II. Câți elevi fac practică în producție?

(*Constanța*, 1962).

19.41. Să se afle valoarea expresiei:

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2y-y^3}-\left(1-\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\left[\left(1-\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{x}\right)\right],$$

pentru:

$$x=\frac{2{,}5+3\frac{2}{3}\cdot\left(5+0{,}4\cdot\frac{5}{8}\right)-0{,}5:2\frac{1}{2}}{24:6{,}4-\left(12:3\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\right)\cdot 0{,}5-\sqrt{1{,}5\,625}};\ y=\left(\frac{1\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{0{,}4}+2\cdot 2\frac{3}{7}\right):1\frac{2}{3}.$$

(*Constanța*, 1962).

19.42. Să se efectueze:

$$\frac{\left(1\frac{16}{75}+2{,}46\right):(55{,}1:5)}{1\frac{2}{3}:1\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{2}{15}+0{,}15\right)}+\frac{9{,}72-6\frac{12}{25}}{\sqrt{1\,640{,}25}\cdot\frac{2}{9}:9}.$$

(*Galați*, 1962).

19.43. De pe 3 ha semănate cu grîu și 5 ha semănate cu porumb s-au recoltat 210 q cereale. În anul următor, folosindu-se metode agrotehnice îmbunătățite, producția de grîu a crescut cu 4 q la ha, iar cea de porumb cu 30%. În aceste

condiții, recolta de grîu și cea de porumb de pe întreaga suprafață este de 267 q. Să se calculeze recolta, la ha, de grîu și porumb, în cel de al doilea an.

(*Hunedoara*, 1962).

19.44. Pentru instalarea luminii electrice în două camere, s-a cumpărat sîrmă. Pentru prima cameră s-a întrebuințat cu 2,5 m mai puțin decît jumătate din toată sîrma, iar pentru camera a doua 0,9 din cantitatea folosită pentru prima cameră. Cîți metri de sîrmă s-au cumpărat, dacă au mai rămas 6,25 m nefolosiți?

(*Mureș*, 1962).

19.45. Terenul unei cooperative agricole de producție a fost împărțit astfel: $\frac{1}{3}$ din teren plus 10 ha pentru semănat cartofi, $\frac{4}{5}$ din rest pentru zarzavat și $\frac{1}{8}$ din teren pentru varză. Să se afle aria terenului cultivat cu cartofi, cu zarzavat și cu varză.

(*Oltenia*, 1962).

19.46. Să se efectueze:

$$\frac{\left(16-4\frac{3}{5}\right):3\frac{4}{5}+4\frac{1}{4}:0{,}85\div 1:\sqrt{0{,}25}}{5+11{,}5+4{,}8:\frac{6}{25}-4\frac{2}{3}\cdot 3\frac{3}{4}}+\frac{9{,}72-6\frac{13}{25}}{\sqrt{1640{,}25}\cdot\frac{2}{9}:9}.$$

(*Oltenia*, 1962).

19.47. Două brigăzi de tractoriști, avînd împreună 35 de tractoriști, ară în 24 de zile 4 800 ha. Un tractorist din prima brigadă ară $5\frac{1}{2}$ ha, iar un tractorist din a doua brigadă 6 ha, pe zi. Cîți tractoriști sînt în fiecare brigadă?

(*Suceava*, 1962).

19.48. Să se efectueze:

$$\frac{14\frac{1}{16}-0{,}0025\cdot 25}{4\frac{1}{4}:0{,}85+1:0{,}5}:0{,}2+\left(4\frac{1}{8}-0{,}004\cdot 300\right):0{,}015.$$

(*Suceava*, 1962).

19.49. Un strungar trebuia să execute într-o lună (patru săptămîni) un anumit număr de piese. În primele două săptămîni el realizează 55% din planul lunar și în săptămîna a treia $\frac{2}{3}$ din rest. Știind că în săptămîna a treia a depășit planul săptămînal cu 6 piese și că în întreaga lună a realizat peste plan 20 de piese, se cere să se afle: a) cîte piese prevedea planul lunar; b) cîte piese a executat strungarul în ultima săptămînă.

(*București*, 1962).

Scanned with OKEN Scanner

19.50. An de an creşte numărul elevilor admişi în şcolile postgenerale. Numai în anul 1959 au intrat în licee, în regiunea Bacău, 1 480 elevi. Să se afle cîţi elevi au fost admişi în licee în anul 1961 şi cîţi în anul 1962, ştiind că numărul elevilor admişi în anul 1961 este cu 140 mai mic decît 70% din numărul elevilor admişi în anul 1962, iar numărul total de elevi admişi în cei doi ani, întrece cu 2 000 dublul numărului de elevi admişi în anul 1959.

(*Bacău*, 1963).

19.51. Într-un oraş s-au prezentat la olimpiada de matematică şi fizică, din anul 1963 un număr de 408 elevi, cu 83 mai mult decît în anul 1962. Să se afle, separat pe obiecte — matematică şi fizică — numărul elevilor prezentaţi în anul 1962 şi în anul 1963, ştiind că, faţă de anul 1962, numărul elevilor prezentaţi la matematică a sporit cu 39%, iar al celor prezentaţi la fizică cu 4%.

(*Banat*, 1963).

19.52. Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$\left[\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{2}{m-n^2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m}\right)\right]:\frac{2mn^2+m^2+n^4}{mn^2},$$

pentru:

$$m=\frac{\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}+\left(4{,}5-3\frac{4}{7}\right)\cdot\sqrt{44\frac{133}{169}}+\frac{15}{28};\quad n=2.$$

(*Constanţa*, 1963).

19.53. Membrii unei cooperative agricole de producţie au recoltat de pe două loturi semănate cu porumb, o cantitate de 1 750 tone. În anul următor, aplicînd metode agrotehnice mai înaintate, au sporit recolta de pe primul lot cu 10%, iar de pe al doilea lot cu $\frac{3}{20}$ din recolta anului precedent, recoltînd astfel 1 960 tone. Ce cantitate de porumb s-a recoltat de pe fiecare lot?

(*Galaţi*, 1963).

19.54. Să se calculeze:

$$\left(\frac{15\frac{3}{5}:10{,}4-73\frac{1}{11}:9\frac{3}{22}\cdot 0{,}0625}{1\frac{1}{11}:3\frac{7}{12}\cdot 5\frac{1}{60}}+3\frac{13}{21}\cdot 8{,}4-\sqrt{1183{,}36}:14\frac{1}{3}\right):28\frac{4}{7}.$$

(*Galaţi*, 1963).

19.55. Din Galaţi pleacă spre Constanţa, la ora 8 dimineaţa, cu acceleratul, un grup de ţărani, într-un schimb de experienţă. La ora 8^{30} porneşte cu un personal, din Constanţa spre Galaţi, un alt grup de ţărani, viteza personalului fiind cu 10 km/h mai mică decît a acceleratului. Cele două trenuri se întîlnesc după

Scanned with OKEN Scanner

o oră de la plecarea celui de al doilea; acceleratul parcursese cu 160 km mai mult decît personalul. Să se determine vitezele celor două trenuri şi distanţa Galaţi-Constanţa.

(*Galaţi*, 1963)

19.56. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$\frac{\sqrt{63{,}25^2 - 37{,}95^2} - \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 49\frac{1}{6}} + \left(0{,}001 : \frac{1}{20} + \sqrt{0{,}0064}\right) \cdot \left(\frac{11}{17} - \frac{1}{1\frac{77}{93}}\right).$$

(*Galaţi*, 1963).

19.57. De pe 7 loturi egale ale unei cooperative agricole de producţie şi de pe 3 loturi egale din altă cooperativă, s-au recoltat în total 2 220 chintale de cereale. În anul următor, s-au cultivat 10 loturi în prima cooperativă şi 5 loturi în a doua, producţia mărindu-se în prima cooperativă cu 15% la fiecare lot, iar în a doua cooperativă cu 20% la fiecare lot. În aceste condiţii s-au recoltat 3 930 chintale de cereale. Care este producţia agricolă în primul an de pe un lot din prima cooperativă şi de pe un lot din a doua cooperativă?

(*Hunedoara*, 1963).

19.58. Să se calculeze:

$$\frac{a^2x - ax^2}{a^2 - x^2} - \frac{a^3 - a^2x}{2ax - x^2 - a^2} - \frac{ax^2 - ax^3}{a^2x + x^2 - x^3 - a^2}.$$

(*Mureş*, 1963).

19.59. Un strungar a lucrat într-o săptămînă 25% din totalul de piese pe care trebuia să le execute într-o lună. În săptămîna următoare a executat 40% din rest, iar numărul de piese lucrate în săptămîna a treia se raportă la numărul de piese executate în cea de a patra săptămînă ca $2\frac{2}{11}$ la 1,5. Ştiind că în săptămîna a patra a executat 33 de piese, să se afle numărul total de piese lucrate în această lună.

(*Oltenia*, 1963).

19.60. Colectivele de muncitori, tehnicieni şi ingineri de la două întreprinderi industriale şi-au propus ca pe anul 1962 să realizeze economii în valoare totală de 8,25 milioane lei. Măsurile luate au făcut ca prevederile planului să fie depăşite: prima întreprindere realizează mai mult cu 50% din cît îşi propusese cea de a doua, iar aceasta de 1,5 ori mai mult decît şi-a planificat. Să se afle ce economii şi-a propus să realizeze fiecare întreprindere, cunoscînd că la sfîrşitul anului valoarea totală a acestora a fost de 12,75 milioane lei.

(*Oltenia*, 1963).

Scanned with OKEN Scanner

19.61. Să se efectueze:

$$\frac{\left[4\frac{3}{5}+\left(1\frac{3}{8}+1\frac{3}{4}-0{,}411\right):0{,}59\right]:4{,}6}{\left(\frac{0.165}{1:5-0{,}125}-0{,}2\right):\left[\left(4\frac{1}{8}-0{,}004\cdot 300\right):0{,}0015\right]}.$$

(*Oltenia*, 1963).

19.62. O cooperativă agricolă de producţie a recoltat de pe două loturi semănate cu secară şi grîu 1 510 q de cereale. Folosind îngrăşăminte chimice, în al doilea an producţia de grîu a crescut cu $\frac{1}{5}$, iar cea de secară cu 15%, recoltîndu-se astfel 1 799 q de cereale. Cîte chintale de grîu şi cîte de secară s-au recoltat în anul al doilea?

(*Oltenia*, 1963).

19.63. Să se efectueze:

$$\frac{\left(2\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{2}{3}}{\left(5\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\right):1\frac{7}{12}+2}\cdot\left(2-0{,}8:2\frac{2}{5}\right)\cdot\sqrt{156{,}25}.$$

(*Oltenia*, 1963).

19.64. Muncitorii unui atelier, lucrînd fiecare cîte 24 de piese pe zi, depăşeau zilnic cu 20% planul pe o zi al atelierului. Dacă numărul muncitorilor ar creşte de $1\frac{2}{5}$ ori şi fiecare muncitor şi-ar depăşi norma zilnică cu 5 piese, atelierul ar realiza zilnic cu 2 400 de piese mai mult decît şi-a planificat. Cîţi muncitori avea angajaţi atelierul şi cîte piese erau planificate pentru o zi?

(*Oltenia*, 1963 — *cursuri serale*).

19.65. Să se afle valoarea numerică a expresiei următoare:

$$\frac{3}{4}+\frac{3x-2}{4}-\frac{(2x-3)(3x-4)}{12}$$

pentru $x=\frac{2}{3}$.

(*Oltenia*, 1963 — *cursuri serale*).

19.66. În vederea deschiderii noului an şcolar, la două magazine s-au pus în vînzare uniforme şcolare. Într-o săptămînă la un magazin s-au vîndut de două ori mai multe uniforme decît la celălalt. Faţă de prima săptămînă, în săptămîna următoare numărul uniformelor vîndute la primul magazin a crescut cu 18%, iar al celor vîndute la al doilea magazin cu 125 bucăţi. Ştiind că în săptămîna a doua diferenţa dintre numărul uniformelor vîndute în primul şi al doilea magazin este de 759, să se afle cîte uniforme s-au vîndut la fiecare magazin în prima săptămînă.

(*Ploieşti*, 1963).

Scanned with OKEN Scanner

19.67. Un tren de marfă format din 25 de vagoane a transportat o cantitate de cărbuni, încărcată în vagoane de 10 tone și de 15 tone. Dacă la dublul numărului vagoanelor de 10 tone s-ar fi adăugat încă 2 și din jumătatea numărului vagoanelor de 15 tone s-ar fi luat 4, trenul astfel format ar fi transportat aceeași cantitate de cărbuni. Ce cantitate de cărbuni s-a transportat?

(*Suceava*, 1963).

19.68. Să se calculeze suma $A + B + C$, unde:

$$A = \left(16\frac{22}{45}:0{,}5 - 1\frac{61}{72}:0{,}5\right)\cdot\frac{5}{7};\quad B = 198{,}9:\left(9\frac{1}{2} + \frac{23}{10}:2{,}3\right);\quad C = 13\frac{1}{2}\cdot 0{,}1.$$

(*Suceava*, 1963).

19.69. Să se efectueze:

$$\frac{\left(0{,}27 + \frac{2}{4} + 1\frac{1}{2}\right):\left(2\frac{2}{5} - 3{,}2\cdot\frac{3}{8}\right)}{\left(2\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{2} - 1\frac{3}{5}:\frac{1}{2}\right)\cdot 4}:\frac{3}{37}.$$

(*Suceava*, 1963).

19.70. Într-un depozit este de 2 ori mai mult cărbune decît în altul. Dacă s-ar mai aduce la primul depozit 8 tone de cărbune, iar la al doilea 14,5 tone, ar fi în amîndouă depozitele aceeași cantitate de cărbune. Cîte tone de cărbune erau la început în fiecare depozit?

(*Bacău*, 1965).

19.71. Să se efectueze exercițiul:

$$\left[\left(\frac{40}{63} - \frac{8}{21}\right):20 + \left(5\frac{5}{9} - \frac{7}{18}\right):35 - \left(\frac{83}{90} - \frac{41}{50}\right):2\right]\cdot 21.$$

(*Bacău*, 1965).

19.72. Un excursionist, avînd de parcurs cu bicicleta o anumită distanță, face în prima zi 20% din această distanță, a doua zi $\frac{4}{15}$ din distanța rămasă, iar a treia zi parcurge cu 14 km mai mult ca în ziua a doua. Făcînd bilanțul după cele trei zile de drum, constată că a trecut de jumătatea drumului cu 90 km. Se cere ce distanță a parcurs în fiecare zi și care este lungimea totală a drumului.

(*Bacău*, 1965).

19.73. Să se efectueze:

$$\frac{\left(5 + 6\frac{6}{11} + 6\frac{7}{6}\right)\cdot\frac{66}{11}\cdot\frac{0{,}7}{60}\cdot\left(0{,}2:\frac{1}{5} + \frac{1}{2}:0{,}5\right)}{\frac{196}{277}\cdot\left(\frac{1}{35} - \frac{2}{495} + \frac{3}{7} - \frac{4}{175} + 2\right)}$$

(*Bacău*, 1965).

19.74. Într-un paralelogram se dă $AB = 10$ m, $AD = 6$ m, aria paralelogramului de 45 m². Cu cît crește aria paralelogramului dacă: a) mărim latura AD

Scanned with OKEN Scanner

cu 2 m; b) mărim latura AB cu 2 m; c) să se calculeze aria rombului cu laturile de cîte 2 m avînd aceleași unghiuri cu paralelogramul dat.

(*Banat*, 1965).

19.75. Se dă expresia:

$$E(x) = \frac{1 - \dfrac{4x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2x}{x^2-1}}$$

Se cere: a) să se aducă la forma cea mai simplă; b) să se arate că această expresie nu poate avea valoarea numerică egală cu -3 pentru nici o valoare a lui x; c) pentru ce valoare a lui x această expresie are valoarea numerică $\frac{3}{5}$.

(*Banat*, 1965).

19.76. Perimetrul unui triunghi ABC este de 60 cm, laturile sale proporționale cu numerele 3, 4 și 5. Cea mai mare dintre laturi este BC. Se duce cercul circumscris triunghiului ABC și semicercurile de diametre AB și AC. Se cere: a) să se calculeze lungimile laturilor triunghiului; b) să se demonstreze că acest triunghi este dreptunghic; c) să se calculeze aria părților în formă de semilună cuprinse între cercuri.

(*Banat*, 1965).

19.77. Să se găsească valoarea lui x care satisface următoarea ecuație:

$$2\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3} - x} + \frac{27}{729} \right) \cdot (10 - 3x) = 7x - 12\frac{2}{3}.$$

(*Banat*, 1965)

19.78. Un pionier trebuie să facă un drum. Mergînd pe bicicletă, în prima oră a parcurs mai puțin cu 1 km decît jumătatea drumului. În a doua oră face $\frac{5}{7}$ din drumul rămas și încă 1 km și mai rămîn de făcut 3 km. De cîți km a fost drumul?

(*Brașov*, 1965).

19.79. Să se efectueze:

$$\frac{\left(5{,}225 - \dfrac{5}{9} - 3\dfrac{5}{6}\right) \cdot \dfrac{36}{43} + 1{,}3}{\left(2\dfrac{23}{50} + 1\dfrac{16}{75}\right) : (55{,}1 : 5) - \sqrt{0{,}0081} + \dfrac{227}{300}} \sqrt{\frac{24^2}{144}}.$$

(*Brașov*, 1965).

19.80. O cooperativă agricolă de producție împarte o tarla de 432 ha în trei părți. Cîte hectare are fiecare parte, dacă prima parte este de 3 ori mai mare

Scanned with OKEN Scanner

decît celelalte două împreună, iar partea a treia este cu 40 ha mai mare decît a doua.

(*Braşov*, 1965).

19.81. Să se efectueze:

$$0{,}5 \cdot \left\{\frac{0\,8725}{0{,}1745} \cdot \left[\sqrt{0{,}25} \cdot \left(\sqrt{3\,249} - 3\right) - 3\right] - 3\right\} + 4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) - \frac{3\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}.$$

(*Braşov*, 1965).

19.82. Doi muncitori au primit, pentru munca depusă, sume de bani al căror raport este $\frac{2}{-}$. Ce sumă a primit fiecare, ştiind că $\frac{3}{5}$ din suma primită de al doilea, mărită cu 30% din suma primită de primul, este cu 1 560 lei mai mică decît suma primită de cei doi muncitori împreună.

(*Constanţa*, 1965).

19.83. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei:

$$\frac{4a^2}{(a^2 - a + 1)(a + 1)^2} : \left(\frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a + 1} \cdot \frac{1}{1 - a} + \frac{1}{a^2 - 2a + 1}\right),$$

pentru

$$a = \left[\frac{\left(11 - 9\frac{1}{2}\right) : 0{,}003}{\left(4{,}05 - 3\frac{13}{20}\right) \cdot 20} - \frac{0{,}45 - \frac{9}{40}}{13\frac{5}{6} : \left(2\frac{3}{5} + \frac{1}{8}\right)}\right] : 62\frac{91}{200}.$$

(*Constanţa*, 1965).

19.84. O cooperativă agricolă de producţie a obţinut de pe cele 40 ha de vie o producţie medie de 6 188,65 litri de vin la hectar. Pentru păstrarea vinului se achiziţionează vase în formă de trunchi de con circular drept cu diametri bazelor de 165 cm şi 235 cm, generatoarea reprezentînd 62,5% din suma celor două raze. Cîte vase sînt necesare pentru păstrarea întregii cantităţi de vin obţinute.

(*Iaşi*, 1965).

19.85. Să se efectueze:

$$\frac{\left(15{,}3 - 11\frac{1}{3}\right) : 2\frac{5}{57} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot 7}{\left[\left(3{,}5 + 1\frac{2}{5}\right) : 4{,}9 + 5\frac{2}{5} - 3\frac{4}{7} - 2{,}5\right] \cdot \frac{21}{46}}.$$

(*Iaşi*, 1965).

19.86. O cantitate de petrol este depozitată în trei cisterne, fiecare avînd forma de cilindru circular drept. Prima cisternă are lungimea cercului de bază de 31,4 m şi generatoarea egală cu diametrul bazei, a doua are capacitatea reprezentînd $1\frac{1}{5}$

Scanned with OKEN Scanner

din capacitatea primei cisterne, iar a treia are volumul cu 69 m³ mai mult decît a doua. Cîte vagoane cisternă cu capacitatea de 20 000 litri sînt necesare pentru transportul petrolului din cele trei cisterne? (Se neglijează grosimea pereților cisternei).

(*Iași*, 1965).

19.87. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{5}y}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}y}{\frac{3}{4}}=8;\quad \frac{0{,}3x-0{,}5y}{3{,}4}-\frac{0{,}3y-0{,}5x}{3}=2.$$

(*Iași*, 1965).

19.88. Într-o secție de lăcătușerie a unei întreprinderi pentru confecționarea unor panouri electrice, se taie plăci în formă de triunghiuri dreptunghice avînd cateta $AB = 150$ cm și ipotenuza $BC = 170$ cm. La aceste plăci se decupează cîte o ferestruică dreptunghiulară $MNPA$ înscrisă în triunghi ($M \in AB$, $N \in BC$ și $P \in AC$) pentru introducerea mînerului de acționare la declanșarea sau întreruperea curentului. Să se determine laturile dreptunghiului $MNPA$ știind că perimetrul său este de 174 cm.

(*Ploiești*, 1965).

19.89. Să se calculeze:

$$\left\{\frac{\left[1{,}5+2{,}(6)+3\frac{3}{4}\right]\cdot 3{,}6}{14-15\frac{1}{6}:2}+\frac{59}{103}\right\}\cdot\frac{\sqrt{5{,}76}\cdot 3\frac{3}{4}+2\frac{2}{11}\cdot\sqrt{17{,}015625}}{5{,}8(3)\cdot 2\frac{4}{7}}.$$

(*Ploiești*, 1965).

19.90. Membrii unei cooperative agricole de producție au strîns în anul 1964 de pe două loturi 440 tone de grîu. În anul 1965, recolta de grîu s-a mărit cu 60% de pe primul lot și cu 75% de pe al doilea, astfel că au strîns 743 tone de grîu. Cît s-a strîns în anul 1965 de pe fiecare lot?

(*Ploiești*, 1965).

19.91. Să se efectueze operațiile:

$$\frac{7{,}625+\sqrt{129\frac{25}{64}}-\left(9\frac{48}{125}+3{,}116\right)}{4\frac{2}{3}\cdot 0{,}15+0{,}3675:\frac{7}{50}-\sqrt{2{,}89}}:\frac{\left(6\frac{2}{3}+2\frac{4}{15}+5\frac{1}{2}\right):\frac{1}{15}-30\frac{5}{28}}{47\cdot 4\frac{1}{4}\cdot 3\frac{22}{42}:42\frac{1}{2}}.$$

(*Ploiești*, 1965).

Scanned with OKEN Scanner

19.92. Să se efectueze:

$$\frac{2,5+3\frac{1}{3}}{2,5-1\frac{1}{3}}:\frac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}}:\left(\frac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}-0,2\right).$$

(*Ploiești*, 1965).

19.93. Să se efectueze operațiile:

$$\left(\frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{\sqrt{462,25}-20\frac{11}{18}}+\frac{1}{2}}{1-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}}-\frac{1}{3}\right):\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{8}}\right).$$

(*Ploiești*, 1965).

19.94. Să se rezolve sistemul:

$$(x+1,5)^2-(y+2x)(y-2x)-(y+1)^2+27=5(x+0,5)^2-2(y-1)^2;$$

$$\frac{2x-y}{3}-\frac{3y-4x}{4}=\frac{1}{3}-\frac{y}{8}.$$

(*Ploiești*, 1965).

19.95. O cooperativă agricolă de producție a semănat cu grîu $\frac{2}{5}$ din tot pămîntul său. O altă cooperativă agricolă de producție, care are cu 800 ha mai mult pămînt decît prima, a semănat cu grîu $\frac{2}{7}$ din pămîntul său. Știind că a doua cooperativă de producție a semănat cu grîu cu 120 ha mai mult decît prima, să se afle cîte hectare de grîu a semănat fiecare cooperativă agricolă de producție.

(*Suceava*, 1965).

19.96. Să se efectueze:

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}:1,5}{\left(\frac{1}{5}\right)^3:\left(\frac{1}{25}\right)^2}+\frac{58}{75}+\sqrt{940\,900}-\frac{\frac{3}{5}:\frac{15}{7}+1}{\frac{8}{15}:20^2}.$$

(*Suceava*, 1965).

19.97. În două depozite s-au adus 4 365 kg de grîu. Știind că $\frac{3}{5}$ din grîul adus la primul depozit, împreună cu $\frac{11}{15}$ din grîul adus la al doilea depozit fac $2\,821\frac{2}{5}$ kg, să se afle cît grîu s-a adus la fiecare depozit.

(*Suceava*, 1965).

Scanned with OKEN Scanner

19.98. La un combinat de hîrtie și celuloză, o lucrare trebuie terminată de 18 muncitori în 25 de zile. În cît timp a fost terminată lucrarea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 25%, iar alți doi muncitori cu 12,5%.

(*București*, 1965).

19.99. Să se efectueze:

$$\frac{\left(3\frac{1}{2}-1\right):5+\left(5\frac{3}{4}-2\right):6+\left(4\frac{7}{9}-3\right):5\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{24}}{2\frac{1}{5}+\frac{1}{1\frac{1}{3}}-\sqrt{3,8025}}.$$

(*București*, 1965).

19.100. Să se efectueze:

$$\frac{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}+40,5\cdot\frac{2}{9}:9}{4:6,25-1:5+\frac{1}{7}\cdot\sqrt{38\,416}+0,28}.$$

(*București*, 1965).

19.101. În cele două ateliere ale unei fabrici de textile s-au țesut într-o lună 8 000 metri de pînză, realizîndu-se norma prevăzută. Organizînd mai bine munca, muncitorii din primul atelier au depășit norma cu 15%, iar cei din al doilea atelier cu 20%. În decurs de trei luni, al doilea atelier l-a întrecut pe primul, realizînd 3 420 m de pînză mai mult. Care era norma pentru fiecare atelier?

(*București*, 1965, — *cursuri serale*).

19.102. Să se efectueze:

$$\frac{41\frac{11}{15}\cdot 7,5-54,6:\frac{2}{5}}{3\frac{13}{21}\cdot 8,4+1\,183,36:14\frac{1}{3}}:\left(\frac{1}{2}:0,125\right).$$

(*București*, 1965, *cursuri serale*).

19.103. Într-un garaj se află în total 81 de camioane. Unele sînt de 1,5 tone, altele de 2 tone, iar altele de 3 tone. Știind că toate camioanele de 1,5 tone transportă tot atîta încărcătură cît toate camioanele de 2 tone și că toate camioanele de 2 tone transportă tot atîta încărcătură ca cele de 3 tone, să se afle cîte camioane au fost de fiecare fel.

(*Licee pedagogice*, 1965).

19.104. Un lăcătuș mecanic dorește să-și construiască dintr-o bară metalică o piesă care să aibă forma unei prisme drepte, avînd ca bază triunghiuri dreptunghice, cu ipotenuza de 10 cm, proiecția uneia din catete pe ipotenuză egală cu 3,6 cm,

Scanned with OKEN Scanner

iar înălțimea prismei, luată în cm, egală cu $\frac{3}{8}$ din mărimea ariei triunghiului de bază. Știind că bara metalică are forma de cilindru, se cunoaște că raportul dintre aria laterală și totală este $\frac{9}{14}$, că diametrul cercului de bază este cu 1 cm mai mare decît înălțimea cilindrului și că densitatea metalului din care este construită bara cilindrică este 7,8 g/cm³, se cere: a) masa barei metalice, b) să se dovedească că se poate construi din bară piesa dorită folosind numai operația de pilire sau tăiere, c) să se afle masa metalului înlăturat din bară la construirea piesei.

(*Argeș*, 1966)

19.105. Într-o prismă dreaptă în care bazele sînt pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$, se cunoaște că perimetrul bazei $ABCD$ este $\frac{3}{4}$ din perimetrul secțiunii $A'D'CB$ (în formă de dreptunghi), iar $A'B$ este cu 4 cm mai mare ca latura AB.

Să se calculeze lungimea laturii pătratului $ABCD$, aria secțiunii $A'D'CB$, înălțimea, aria totală și volumul prismei.

(*Bacău*, 1966).

19.106. Să se efectueze:

$$\frac{\frac{30}{103}\cdot\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)-2:2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{32}}{\left[3\frac{1}{4}\cdot\left(14\frac{4}{5}+\frac{4}{15}\right)-47\right]:5\frac{9}{10}}.$$

(*Bacău*, 1966).

19.107. Dintr-o bară metalică de formă cilindrică cu diametrul de 2,8 dm, se strunjește o piesă care se compune dintr-un cilindru, un trunchi de con și un con. Înălțimea z a cilindrului, socotită în dm, este soluția ecuației:

$$\frac{(2z-3)^2+7}{7}+\frac{z(z+1)}{4}-\frac{5z-18}{10}=\frac{(3z+2)(3z-2)}{14}+\frac{3}{35},$$

iar raza x și generatoarea conului y, socotite în cm, sînt soluțiile sistemului:

$$\frac{4x-3y}{9}-\frac{2x-y}{3}=\frac{x-y}{6}-1;\quad \frac{5x-2y+5}{4}-\frac{2x-y+5}{8}=3+\frac{x+y}{24}.$$

Cunoscînd că înălțimea trunchiului de con este egală cu $\frac{3}{5}$ din înălțimea cilindrului, se cere: a) aria laterală a piesei; b) volumul piesei; c) ce procent din aria laterală reprezintă aria secțiunii axiale; d) să se determine unghiul format de generatoarea conului cu generatoarea trunchiului de con.

(*Banat*, 1966).

19.108. Într-un cerc se înscrie un triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A și un triunghi echilateral. Aria triunghiului dreptunghic este 96 cm², iar una din catetele sale de 12 cm. Să se calculeze: a) raza cercului; b) expresia

Scanned with OKEN Scanner

$E = \sin^3 B + \cos^3 B$; c) raportul dintre perimetrul triunghiului echilateral și perimetrul triunghiului dreptunghic: d) cu cît și de cîte ori este mai mare aria triunghiului echilateral decît aria triunghiului dreptunghic; e) cît la sută din aria cercului ocupă triunghiul echilateral; f) s-ar schimba rezultatul de la punctul precedent dacă raza cercului ar avea o altă valoare?

În centrul cercului O, ridicăm o perpendiculară pe planul cercului. Pe această perpendiculară considerăm un punct M, astfel ca $MO = x$ cm, unde x este rădăcina ecuației:

$$\frac{2x}{3} + \frac{\frac{3x-5}{4} - \frac{5x-3}{6}}{\frac{4x-3}{9} \cdot \frac{2x-5}{4}} = \frac{2x-4}{3}.$$

g) Să se rezolve ecuația; h) Să se calculeze aria laterală a piramidei cu vîrful în M și care are ca bază triunghiul echilateral.

(*Banat*, 1966).

19.109. Două brigăzi ale unei C.A.P. seamănă sfeclă de zahăr pe o tarla în formă de triunghi ce are baza 16 hm. Pentru efectuarea lucrărilor se împarte tarlaua în două parcele proporțional cu numărul lucrătorilor din fiecare brigadă. Știind că împărțirea s-a făcut printr-o dreaptă paralelă cu baza, care are lungimea de 12 hm și care se află la o distanță de 75 m de bază și că numărul lucrătorilor este 96, să se afle: a) aria fiecărei parcele; b) numărul lucrătorilor din fiecare brigadă.

(*Brașov*, 1966).

19.110. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{1 - \frac{3x^2}{1-x^2}}{1 + \frac{x}{1+x}}; \quad E_2 = \left(\frac{2x^3 + 2x}{4x^2} - 1\right) : \frac{2x-2}{x(2x-1)}.$$

a) Să se calculeze valorile lui E_1 și E_2 pentru $x = \frac{1}{4}$;

b) Să se calculeze media proporțională a expresiilor E_1 și E_2;

c) Fie A media proporțională găsită. Pentru ce valoare a lui x expresia A nu are sens:

d) Să se afle valoarea lui x pentru $A = 1{,}41$ (6).

(*Brașov*, 1966).

19.111. Două brigăzi de tractoriști au avut de arat o anumită suprafață de pămînt. Brigada A a arat cu 180 ha mai mult decît brigada B, iar $\frac{2}{5}$ din terenul arat de prima brigadă fac cît $\frac{4}{9}$ din terenul arat de cealaltă brigadă. Cîte hectare a arat fiecare brigadă?

(*Reg. București*, 1966).

Scanned with OKEN Scanner

19.112. Să se efectueze:

$$\frac{\left(\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\cdot\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1}.$$

(*Reg. Bucureşti*, 1966)

19.113. O piesă metalică are forma unui con circular drept cu lungimea cercului de bază de 94,20 cm şi înălţimea de 0,2 m. Cîte bile cu raza de 5 cm se pot turna prin topirea acestei piese:

(*Cluj*, 1966).

19.114. Se dă expresia:

$$E = a + \frac{x+1}{2ax-a} : \frac{x^2-1}{2a} - a\cdot\left(1-\frac{a}{2x-1}\right).$$

Se cere: a) să se aducă E la forma cea mai simplă; b) să se calculeze valoarea numerică a expresiei pentru $x = 3\frac{1}{2}$ şi $a = \frac{2}{3}$; c) care sînt valorile admise pentru x.

(*Cluj*, 1966).

19.115. Se dă trapezul isoscel $ABCD$ în care AB este baza mică, CD baza mare, iar $BC = AD$. Considerăm MN linia mijlocie a trapezului. Cunoscînd că $MN = 13$ dm, diferenţa bazelor este de 100 cm şi unghiul de la baza trapezului de 45°, se cere: a) mărimea bazei mari şi a bazei mici a trapezului; b) aria trapezului, c) volumul corpului obţinut prin rotirea trapezului în jurul dreptei ce uneşte mijloacele bazelor.

(*Crişana*, 1966).

19.116. Să se efectueze:

$$\frac{20\frac{8}{15}\cdot 7{,}5 - 56{,}4\cdot 2\frac{1}{2}}{3\frac{13}{21}\cdot 8{,}4 - 34{,}4 : 14\frac{1}{3}} + 43\frac{3}{4} : 11\frac{2}{3} + 605{,}16\cdot\frac{5}{6}.$$

(*Crişana*, 1966).

19.117. În clasele a V-a ale unei şcoli sînt 120 elevi. Numărul elevilor din clasele a VI-a este 95% din numărul elevilor clasei a V-a. Numărul elevilor din clasele a V-a reprezintă $\frac{4}{5}$ din numărul elevilor din cla ele a VI-a şi a VII-a laolaltă şi în acelaşi timp reprezintă $\frac{2}{5}$ din numărul elevilor întregii şcoli. Cîţi elevi sînt în clasa a VIII-a şi cîţi în întreaga şcoală?

(*Constanţa*, 1966)

Scanned with OKEN Scanner

19.118. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei:

$$\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]:\frac{a-b}{a^2b^2},$$

pentru $a=45\%$ din $7{,}5:3\frac{3}{8}\cdot\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}$ și $b=\dfrac{\left(2\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{3\frac{4}{5}}-\frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}\right):1\frac{77}{228}}{\sqrt{462{,}25}-20\frac{9}{18}}$.

(*Constanța*, 1966).

19.119. Se dă expresia:

$$E(x)=\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x^2}{x^2+2x+1}\right):\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{x}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.
b) Să se calculeze valoarea numerică pentru:

$$x=\left[\frac{\left(0{,}15\cdot 10+2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}\right)\cdot 3{,}6}{14-15\frac{1}{8}:2}+\frac{59}{103}\right]\cdot\left(2{,}4+2\frac{2}{11}\cdot\frac{\sqrt{10{,}89}}{3}\right).$$

(*Galați*, 1966)

19.120. Se dă expresia:

$$E(x)=\left(\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x+5}{1-x^2}\right):\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x}\right).$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.
b) Să se afle valoarea numerică pentru:

$$x=\frac{\left(0{,}305:10-0{,}00205\cdot 10+2\frac{1}{25}:51\right)\cdot 13\frac{1}{3}}{(11{,}9-\sqrt{108{,}16}):0{,}75}.$$

(*Galați*, 1966).

19.121. Valorile numerice ale lui x și y, care verifică sistemul:

$$x-2-\frac{3y-2x}{7}=y-\frac{3x+8}{5};\quad \frac{2y-4}{3}-\frac{3x-2y}{2}=x-\frac{5y-1}{8},$$

exprimate în decimetri, sînt: cea mai mică înălțimea unei piramide exagonale, iar cea mai mare muchea piramidei. Se cere aria totală și volumul piramidei.

(*Hunedoara*, 1966)

Scanned with OKEN Scanner

19.122. Să se efectueze:

$$\frac{18-8\frac{3}{4}\cdot\left(2\frac{4}{7}-1{,}6\right)+4\frac{2}{7}\cdot\left(14\frac{1}{3}-\sqrt{161{,}29}\right)}{2\frac{2}{3}\cdot 4{,}5:3\frac{4}{5}-1\frac{1}{19}\cdot\left(7{,}2-\frac{141}{20}\right)}.$$

(*Hunedoara, 1966*).

19.123. O bucată masivă de metal are forma unui cilindru circular drept completat cu 2 conuri circulare drepte care au înălțimile egale cu înălțimea cilindrului și ca baze, bazele cilindrului. Generatoarea unuia din conuri este mai mare cu 4 cm decît înălțimea cilindrului, iar suma celor două elemente este de 16 cm.

a) Să se calculeze aria și volumul bucății de metal.

b) Bucata de metal se topește și se toarnă într-o formă de prismă patrulateră regulată cu înălțimea de 31,4 cm. Să se afle latura bazei prismei.

(*Iași*, 1966).

19.124. Să se efectueze:

$$\frac{\left(2\frac{3}{4}-\sqrt{2{,}25}:\left(5{,}2-4\frac{1}{4}\right)-\left(3\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}\right):\left(2\frac{1}{4}-1\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{11}{67}\right.}{\left[\left(3-\frac{1}{13}\right)\cdot\frac{1}{28}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]:\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{7}}.$$

(*Iași*, 1966).

19.125. Aria laterală a unui bazin de apă, de forma unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m². Înălțimea bazinului este de 6 m, iar una din dimensiunile bazei este jumătate din cealaltă. Se cere: a) să se calculeze volumul bazinului; b) ce cantitate de apă rămîne în bazin, dacă nivelul apei scade cu 8 cm.

(*Maramureș*, 1966).

19.126. Să se efectueze operațiile:

$$E=\frac{\left(\frac{17}{5}+7\frac{4}{15}\right)\cdot 0{,}25\cdot\frac{1}{13}+\left(\frac{15}{2}-0{,}5\right):7}{\left(\sqrt{26{,}4\,196}-4\frac{7}{50}\right):0{,}125}.$$

(*Maramureș*, 1966).

19.127. Se dau două piramide regulate, una patratică, alta exagonală. Latura bazei primei piramide este de 2 ori cît latura bazei celelalte. Raportul înălțimilor celor două piramide este egal cu raportul laturilor bazelor. Să se afle raportul volumelor și raportul ariilor laterale.

(*Mureș*, 1966).

Scanned with OKEN Scanner

19.128. Să se calculeze:

$$\frac{\left[\left(12\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{4}{15}\right):\frac{1}{15}-6:\frac{1}{28}\right]\cdot\frac{4}{11}}{\left(5\cdot 2\frac{2}{5}-8\frac{3}{22}\right):42\frac{1}{2}}.$$

(*Mureș*, 1966).

19.129. O piesă în formă de trunchi de con se taie cu un plan de-a lungul axei sale, secțiunea determinată fiind un trapez isoscel cu aria de 210 dm². Cunoscînd că înălțimea trapezului este de 16,8 dm, iar diferența bazelor de 6 dm, se cere: a) aria piesei; b) masa piesei, cunoscînd că densitatea metalului din care este confecționată este de 7,8 g/cm³.

(*Oltenia*, 1966).

19.130. Să se efectueze:

$$\frac{\frac{2y}{x-y}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{y-x}{x+y}\right)}{\left[\frac{x+y}{2(x-y)}-\frac{x-y}{2(x+y)}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right]\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)}.$$

(*Oltenia*, 1966).

19.131. O piramidă patrulateră regulată are înălțimea de x cm și apotema de y cm. Să se calculeze aria totală și volumul acestei piramide știind că valorile lui x și y se obțin prin rezolvarea următorului sistem de ecuații:

$$\frac{x+2y}{6}-\frac{4y-3x}{4}=8;\ (x-6)^2-(y-5)^2=(x+y)(x-y)-11.$$

(*Ploiești*, 1966).

19.132. Directivele Congresului al IX-lea al P.C.R. au prevăzut pentru anul 1970 o producție de energie electrică pe cap de locuitor, în kWh, egală cu valoarea următoarei expresii:

$$\frac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\left(\frac{62}{75}-0{,}16\right):100}+\sqrt{10\,404}.$$

Față de producția anului 1965 aceasta va reprezenta o creștere cu 84%, iar producția prevăzută pentru anul 1975, față de producția anului 1965, va reprezenta 308%. Să se afle producția de energie electrică pe cap de locuitor din anul 1965 și cea prevăzută pentru anul 1975.

(*Ploiești*, 1966).

19.133. Se dau expresiile:

$$A=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\frac{1}{x}-1};\ B=\frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2}-1};\ C=x-\frac{1-2x^2}{1-x}+1.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.
b) Să se calculeze media lor aritmetică.
c) Să se calculeze valoarea numerică a mediei aritmetice găsite, pentru:

$$x = \frac{1{,}5 - \frac{1}{4}}{\sqrt{1{,}5\,625}} \cdot 1{,}1(6).$$

(*Ploiești*, 1966).

19.134. Se dă un trapez dreptunghic cu baza mare de 9 dm, baza mică de 6 cm, iar latura oblică de 5 cm. Se cere: a) aria trapezului; b) mărimile perpendicularelor duse din unghiurile drepte pe diagonalele corespunzătoare; c) volumul și aria totală a corpului ce rezultă prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

(*Suceava*, 1966).

19.135. Să se rezolve următorul exercițiu:

$$\frac{\left[1{,}(7) + \frac{12}{54}\right] \cdot \left(3{,}14 - \frac{7}{50} + 4\frac{1}{2}\right)}{\left[0{,}3(12) + \frac{97}{330}\right] \cdot \left(\sqrt{1{,}44} + \sqrt{0{,}36}\right)} : \frac{15}{1{,}8}.$$

(*Suceava*, 1966).

19.136. Într-un trunchi de con cu generatoarea de 10 cm, dublul razei bazei mici întrece cu 15 cm jumătatea razei bazei mari, iar raportul dintre raza mare micșorată cu 6 cm și suma razelor este egal cu $\frac{2}{5}$. Să se afle: a) razele bazelor; b) volumul trunchiului de con.

(*Municipiul București*, 1966).

19.137. Se dă expresia:

$$\frac{x^4 - y^4}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^3 + xy^2}{x + y}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă și apoi să se calculeze valoarea ei numerică pentru:

$$x = \left(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1{,}75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{16} \text{ și } y = \frac{8}{5} \cdot \sqrt{\frac{225}{4\,096}}.$$

(*Municipiul București*, 1966)

19.138. Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$\frac{2 \cdot (7{,}125 + x) - \frac{1}{21} \cdot \sqrt{7\,056}}{\left(3x + 1\frac{7}{8}\right) : 3}$$

pentru:

$$x = \frac{\left(\frac{5}{8} \cdot 3 + 3\frac{5}{8}\right) : \frac{4}{19}}{2^2 \cdot 3^2 - 5^2}$$

(*București*, 1966).

Scanned with OKEN Scanner

19.139 Un pahar cu forma exterioară de con cu raza R cm înălțimea H cm este așezat cu vîrful în jos (gura paharului fiind perfect orizontală). Se toarnă apă în pahar pînă cînd distanța de la gura paharului pînă la apă devine egală cu 3 cm. Cunoscîndu-se că între R și H există relațiile:

$$R+\frac{H-3}{3}-\frac{R+3}{2}=\frac{2(H-R)}{7}+\frac{R}{6};\quad \frac{H+4}{4}-\frac{R-2}{3}=\frac{\frac{5(H-R)}{7}+1}{6}+\frac{13R}{34}.$$

Se cere: a) să se determine H și R; b) cantitatea apei din pahar; c) Știind că masa apei din pahar este cu 84% mai mare decît masa paharului, să se afle cît cîntărește paharul gol.

(*Argeș, iunie* 1967).

19.140. Un trapez dreptunghic are aria de 480 cm², înălțimea de 16 cm, iar baza mare este $\frac{3}{2}$ din lungimea bazei mici. Să se afle: a) perimetrul trapezului; b) diagonalele trapezului; c) volumul și aria totală a corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

(*Bacău, iunie* 1967).

19.141. Se consideră expresia:

$$E(a,b)=\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2}+\frac{a^2-ab-b^2}{ab}+\frac{a^2-ab-b^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right):\left[\frac{2a}{3(a^2-b^2)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6a+6b}-\frac{3}{2a+2b}+\frac{2}{3a-3b}\right)\right].$$

Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle valoarea numerică pentru:

$$a=\sqrt{1640{,}25}\cdot\frac{2}{9}:9;\quad b=\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}.$$

(*Bacău, iunie* 1967).

19.142. Rîul Bega, care între Timișoara și vărsarea lui în Tisa este canalizat și navigabil, are o lățime superioară de 32 m și o lățime inferioară (lățime de fund) de 16 m. Adîncimea canalului, în metri, este dată de soluția ecuației:

$$\frac{8}{x-1}:\left[\frac{(x+1)^2}{1-x}+\frac{x^2-2x+1}{x+1}+6\right]+4=0$$

sau de rezultatul obținut prin rezolvarea exercițiului:

$$\left(\sqrt{0{,}64}-\frac{1}{4}:\frac{1}{3}\right)\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5.$$

Să se deseneze secțiunea transversală a canalului Bega în raport 1 : 200.

Cîți metri cubi de pămînt au fost dislocați la săparea canalului, dacă lungimea lui este de 118 km?

Cîtă apă, în hectolitri, conține canalul, dacă adîncimea apei scade la 2 metri?

(*Banat, iunie* 1967).

Scanned with OKEN Scanner

19.143. Distanța dintre Timișoara și Otelec este de 40 km. Din Otelec și Timișoara pleacă concomitent două vapoare de pasageri, unul spre celălalt. Viteza ambelor vapoare este egală cu 8 km/oră în apă stătătoare. Știind că apele Begăi curg cu o viteză de 4 km/oră, să se calculeze după cît timp se vor întîlni vapoarele. La ce distanță față de Timișoara este situat locul de întîlnire?

(*Banat, iunie* 1967).

Notă: Pentru rezolvitorii din alte regiuni ale țării, care nu cunosc geografia județului Timiș, facem precizarea că localitatea Otelec se găsește în aval de Timișoara.

19.144. Se dă expresia:

$$E(x)=\frac{\left(\frac{3x+1}{x+1}-2\right)^2-\frac{2x-2}{x+1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-3+\frac{3x-3}{x+1}-\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}},\ (\text{unde } x\neq 1;\ x\neq -1).$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei $E(x)$, pentru:

$$x=6{,}302-2:0{,}7(3)-4\frac{3}{11}+\sqrt{\frac{1.001\,001}{3\cdot\left(0{,}1+\frac{3}{5}\cdot\frac{187}{10^4}\right)+\frac{7}{10^6}}\cdot 0{,}013068}.$$

c) Să se arate că expresia $E(x)$ nu are sens pentru

$$x=\frac{a^4-9}{a^6+27}\cdot\left(a^2-3+\frac{3a^2}{a^2-3}\right)\ \text{unde } a^2\neq 3.$$

(*Brașov, iunie* 1967).

19.145. Un tractorist pleacă de la sediul I.M.A. cu tractorul, la o cooperativă agricolă de producție. După 45 de minute de mers se oprește într-un sat și află că mai are 1 km pînă cînd să parcurgă $\frac{1}{3}$ din întreaga distanță. Mărește după aceea viteza tractorului cu 6 km/oră și ajunge la destinație după $1\frac{1}{4}$ ore. La ce depărtare se află C.A.P. de I.M.A.?

(*Reg. București, iunie* 1967).

19.146. Să se efectueze:

$$\frac{\left(3\frac{1}{2}-1\right):5+\left(5\frac{3}{4}-2\right):6+\left(4\frac{7}{9}-3\right):5\frac{1}{3}-\frac{11}{12}}{2\frac{1}{5}+\frac{1}{1\frac{1}{3}}-\sqrt{3{,}8025}}.$$

(*Reg. București, iunie* 1967).

19.147. Apotema unei piramide patrulatere regulate este rădăcina ecuației (exprimată în cm):

$$x-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2(x+1)}{3}-\frac{3(x-1)}{5}\right]=\frac{x-2}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-3}{4}-\frac{2x-1}{5}\right)+16\frac{1}{2}.$$

Înălțimea piramidei este 80% din apotema sa. Să se afle volumul și muchea piramidei.

(*Cluj, iunie* 1967)

19.148. Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{\left(3\frac{1}{3}\cdot 6{,}6 + 2 : 12{,}75\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{16}{17} + \frac{31}{5}\right)}{\left(75 : 4\frac{1}{6} - 3\frac{9}{23}\cdot 3\right)\cdot\left(\frac{5}{18} + \frac{4}{15} + 0{,}35\right)} + \frac{9\frac{1}{3} : \frac{28}{33}}{1{,}25\cdot 5{,}6}.$$

(*Cluj, iunie* 1967)

19.149. Raportul dintre aria laterală și aria totală a unui con circular drept este $\frac{5}{8}$. Diametrul cercului de bază este cu 10 cm mai mare decît generatoarea conului. Să se afle: a) raza cercului de bază și generatoarea conului; b) aria laterală aria totală și volumul conului.

(*Crișana, iunie* 1967)

19.150. Să se efectueze:

$$\frac{4{,}8 : 5\frac{7}{10}\cdot 1\frac{3}{16} - \left(3\frac{1}{7} - 2{,}8\right)\cdot 1\frac{1}{6} + \sqrt{54{,}76}}{8 - 4{,}7 : \left(5 - 0{,}8 : 2\frac{4}{6}\right) + \frac{4}{5}\cdot 1{,}25}$$

(*Crișana, iunie* 1967)

19.151. Se dă un trunchi de con circular drept cu înălțimea de 3 dm. Diametrul bazei mari este cu 7 dm mai mare decît generatoarea, iar 20% din mărimea generatoarei, adunat cu 40% din mărimea bazei mari este egal cu $3\frac{2}{5}$ dm. Să se afle a) aria laterală și volumul trunchiului de con; b) volumul conului care completează trunchiul de con.

(*Galați, iunie* 1967)

19.152. Se dă expresia algebrică:

$$E(x) = \frac{4x^2}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 2x + 1)} : \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{2}{x + 1}\cdot\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1}\right).$$

Se cere: a) să se aducă expresia la forma cea mai simplă; b) să se afle valoarea numerică a expresiei, pentru:

$$x = \frac{0{,}725 : 10 + 0{,}00275\cdot 10 + 3\frac{1}{5} : 2^3\cdot 3^2}{5{,}7 : 2{,}1 - \frac{12}{11}\cdot\sqrt{\frac{1\,089}{576}}} + \frac{81}{85}.$$

(*Galați, iunie* 1967)

Scanned with OKEN Scanner

19.153. Pe un teren orizontal în formă de triunghi dreptunghic, cu cateta $AB =$ 15 m și ipotenuza $BC = 17$ m, se trasează un dreptunghi $MNPA$ înscris în iunghi ($M \in AB$; $N \in BC$; $P \in AC$), perimetrul dreptunghiului fiind de 17,4 m. e acest contur, se sapă un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic, având lîncimea de 3,7 m. Să se afle volumul paralelipipedului.

(Hunedoara, iunie 1967).

19.154. Să se efectueze:

$$5\frac{1}{2} : \frac{2{,}75}{\sqrt{20{,}25} - 1 : \frac{2}{7}} \cdot \left(\frac{27}{\sqrt{729}} + \frac{1\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3} - \frac{1}{9} : \frac{1}{3}} \right)$$

(Hunedoara, iunie 1967).

19.155. Un trapez dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$ și $AD \perp AB$) are baza mică $)C = 0{,}5$ m; $BC = 7{,}5$ m, iar AB reprezintă $62\frac{1}{2}$ % din suma celor două laturi noscute. Să se afle: a) mărimea liniei mijlocii și aria trapezului; b) aria laterală volumul corpului obținut prin rotirea completă a trapezului în jurul laturii D; c) Considerînd un vas cu forma și dimensiunile corpului geometric anterior, ă se afle capacitatea lui, în hl.

(Iași, iunie 1967).

19.156. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} - \frac{b}{a - b}; \quad E_2 = \frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b} + \frac{1}{a^2 - b^2}; \quad E_3 = 2 + \frac{1}{2ab}.$$

a) Să se aducă E_1, E_2 și E_3 la cea mai simplă formă;
b) Să se determine x din proporția:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{x}{E_3}.$$

(Iași, iunie 1967).

9.157. Dintr-un teren de forma unui pătrat, s-au însămînțat cu porumb două șii dreptunghiulare de lățimi egale cu 15% din latura pătratului, iar restul renului, care a rămas tot un pătrat, a fost însămînțat cu grîu. Cîte hectare au ost însămînțate cu porumb și cîte cu grîu, dacă fîșia cea mai lungă are cu 810 000 etri pătrați mai mult decît cealaltă fîșie.

(Maramureș, iunie 1967).

19.158. Un trunchi de con avînd înălțimea de 6 cm este secționat de un plan aralel cu planul secțiunii axiale și la distanță de 4 cm de el. Secțiunea făcută

de plan în trunchi este un trapez isoscel avînd bazele x și y (x și y fiind exprimate în cm). Știind că valorile lui x și y se obțin prin rezolvarea următorului sistem:

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1; \quad \frac{1-2x}{-2} - \frac{3y-1}{3} = \frac{5}{6},$$

să se afle, cu aproximație de o zecime, volumul și aria laterală a trunchiului de con.

(Mureș, iunie 1967).

19.159. Să se efectueze calculele:

$$\frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + 5\frac{5}{6}\right) : 2\frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{3} - 0{,}25 \cdot 2\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{17}{4} - 0{,}25\right)}.$$

(Mureș, iunie 1967).

19.160. Un con circular drept are raza bazei de 40 cm și generatoarea de 50 cm. La 10 cm depărtare de vîrf se face o tăietură printr-un plan paralel cu baza. Se cere: a) aria totală a conului; b) aria laterală și volumul conului cu baza cercul de secțiune și vîrful în centrul cercului bazei conului dat; c) aria totală și volumul conului mic, de secțiune, în cazul cînd raza bazei conului dat este a, generatoarea g, iar înălțimea conului mic i.

(Liceele de specialitate, Mureș, 1967).

19.161. Unul din coșurile unei termocentrale, în formă de trunchi de con, are înălțimea de 200 m. Diametrul exterior la bază este de 30 m, iar la vîrf de 3,6 m. Diametrul interior este, pe toată înălțimea, de 2,4 m. Să se afle masa acestui coș, dacă 1 m³ de zidărie cîntărește 1,8 tone.

(Oltenia, iunie 1967).

19.162. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}}{2 - \frac{a+b}{a-b}} \cdot \frac{1 - \frac{4b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}} = \frac{x}{a-b}.$$

Ce valori ia soluția pentru $a = b$; dar pentru $a = 2b$?

(Oltenia, iunie 1967).

19.163. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{2x-79}{11} + \frac{y}{2} = 118; \quad \frac{3x+5}{5} = \frac{y-31}{3}.$$

Soluția sistemului reprezintă bazele unui trapez (exprimate în cm) a cărui înălțime este $\frac{16}{57}$ din diferența bazelor.

Să se afle masa unui corp sferic confecționat din fier (greutatea specifică a fierului fiind 7,8 g/cm³), care are aria egală cu aria trapezului.

(Suceava, iunie 1967)

19.164. Să se calculeze:

$$\frac{\frac{\sqrt{95{,}0\,625}}{\frac{13}{4}} : 0{,}24 : \frac{5}{3} - \frac{\left(\frac{5}{8}\cdot 3 + 3\frac{5}{8}\right) : \frac{4}{9}}{2^2\cdot 3^2 - 5^2}}{\left(\frac{2{,}5}{\frac{29}{4}}\cdot 3\frac{14}{5} - \frac{108}{18} : 4\frac{4}{5}\right)\cdot\sqrt{72{,}25}}.$$

(Suceava, iunie 1967).

19.165. Un triunghi ABC are laturile $AB = 13$ cm și $AC = 15$ cm, iar înălțimea $AD = 12$ cm, punctul D fiind situat între B și C. Să se afle: a) perimetrul triunghiului ABC; b) lungimea cercului (O) circumscris triunghiului ADC; c) valoarea raportului dintre aria triunghiului echilateral înscris în cercul (O) și aria exagonului regulat înscris în același cerc; d) aria și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului ABC în jurul laturii BC.

(Municipiul București, iunie 1967).

19.166. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \left(\frac{4}{x^2-1} + \frac{2x+4}{x+1} + \frac{x^2+1}{x-1}\right)\cdot\frac{1-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x+2}}$$

și apoi să se calculeze valoarea ei pentru:

$$x = 2\sqrt{0{,}015\,625} + \frac{8}{11} - 1\frac{1}{4}\cdot 2\frac{3}{5} + 2\frac{1}{4} : 8\frac{1}{4}.$$

Pentru ce valoare a lui x expresia ia valoarea $\frac{1}{2}$? Dar valoarea 1.

(Municipiul București, iunie 1967).

19.167. Se dă ecuația:

$$x\cdot\sqrt{\frac{0{,}0036}{4}} + \frac{3\cdot\left[\frac{x^3-1}{3x^2+3x+3} + 0{,}(3)\right]}{1\frac{3}{97}} + \frac{2\cdot\left(\frac{1}{0{,}2} + 2\cdot\sqrt{8^2+6^2}\right)}{\frac{4x^2-9}{2x-3} - (x+3)} +$$

$$+ 0{,}2(3) = \frac{2^2\cdot 3^2}{5^2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{30}.$$

Se cere: a) să se rezolve ecuația; b) să se determine valorile lui a pentru care:

$$\frac{2x_1 - 5a}{3x_2 - 15a} > 0,$$

x_1 și x_2 înlocuindu-se cu valorile aflate la punctul a); $(x_1 > x_2)$.

(Alba, 1968).

Scanned with OKEN Scanner

19.168. Într-un trapez dreptunghic baza mare este dublul bazei mici. Latura oblică este cu 6 cm mai mare decît baza mare, iar înălțimea cu 14 cm mai mare decît baza mică.

a) Să se afle laturile și aria trapezului.

b) În cazul cînd baza mică este de 10 cm, să se afle aria totală și volumul corpului ce se obține prin rotația completă a trapezului dreptunghic în jurul înălțimii sale.

(Arad, iunie 1968).

19.169. Să se efectueze operațiile:

$$10 - 4 \cdot \frac{0{,}0625 + \frac{15}{16} + \sqrt{4{,}1616} - \frac{1}{25}}{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4) : (5^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2) \cdot 0{,}1 + \frac{33{,}(3)}{5^2 \cdot 2^2}}.$$

(Arad, iunie 1968)

19.170. Un teren în formă de triunghi are laturile de 260 m, 280 m și 300 m. Terenul este despărțit în două părți, prin trasarea unei paralele la latura de 280 m, a cărei lungime este egală cu suma laturilor neparalele ale trapezului obținut prin ducerea acestei paralele. Porțiunea de teren în formă de trapez este împrejmuită cu un gard de sîrmă ghimpată (care are 3 rînduri de sîrmă). Se cere să se afle cîți metri de sîrmă ghimpată sînt necesari pentru confecționarea gardului.

(Argeș, iunie 1968).

19.171. Să se calculeze:

$$\frac{4{,}25 : \frac{17}{20} + 1 : \sqrt{0{,}25}}{\left(\frac{139}{25} - \sqrt{16{,}4836}\right) : \sqrt{0{,}09} \cdot 0{,}1} - [0{,}(5) + 1{,}(4)].$$

(Argeș, iunie 1968).

19.172. Cunoscîndu se că, într-un trunchi de con circular drept, suma razelor celor două baze este egală cu raza unei sfere de arie $400 \cdot \pi$ cm², că $\frac{1}{2}$ din raza mare întrece cu 2 cm raza mică și că înălțimea este egală cu 4 cm, se cere: a) mărimile celor două raze; b) aria laterală și volumul trunchiului de con.

(Argeș, septembrie 1968 — cursuri serale și fără frecvență).

19.173. Să se efectueze:

$$\frac{8 - 4{,}7 : \left(5 - \frac{4}{5} : 2\,\frac{2}{3}\right) + 0{,}8 \cdot \sqrt{1{,}5625}}{\left(5\,\frac{1}{3} - 3\,\frac{3}{4}\right) : 1\,\frac{7}{12} + 2} \cdot \frac{3}{8}.$$

(Argeș, septembrie 1968 — cursuri serale și fără frecvență)

Scanned with OKEN Scanner

19.174. Un rezervor are forma unui trunchi de con circular drept. Cunoscîndu-se că raportul dintre razele celor două baze este $\frac{17}{8}$, că diferența dintre aceste raze este de 1,8 m și că generatoarea face cu baza un unghi de 45°, se cere: a) mărimea razelor celor două baze; b) cîtă vopsea s-a folosit pentru vopsitul rezervorului în exterior, știind că pentru 3,14 cm² a fost nevoie de 0,5 g; (baza mare fiind pe pămînt nu s-a vopsit, s-a vopsit numai baza mică și partea laterală).

(Argeș, septembrie 1968).

19.175. Fiind dată expresia:

$$E(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + 2x^2y + xy^2} : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y},$$

se cere: a) să se aducă această expresie la forma cea mai simplă; b) să se calculeze valoarea numerică a expresiei pentru:

$$x = \left(\sqrt{25{,}1001} - 4\frac{7}{50}\right) : 0{,}03 - \sqrt{576};$$

$$y = \frac{4{,}25 : 0{,}85 + 1 : 0{,}5}{\left(5\frac{14}{25} - 4{,}06\right) : 3} : 3\frac{5}{3}.$$

(Argeș, septembrie 1968).

19.176. Baza unei prisme drepte este un romb cu latura de 10 cm și diagonala mare de 16 cm. Înălțimea prismei este de 6 cm. Unind mijloacele laturilor bazei inferioare cu punctul de intersecție al diagonalelor bazei superioare, se obține o piramidă. Să se afle: a) volumul prismei; b) volumul piramidei; c) aria laterală a piramidei.

(Brăila, iunie 1968).

19.177. Se dă expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x^4 + x^2}{x^6 + x^4 + x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 + 1}\right) : \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2x^2}{x^6 - x^4 + x^2 - 1}\right).$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) Să se determine valorile lui x pentru care $E(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$.

c) Să se determine valorile lui x pentru care $E(x)$ nu are sens.

(Brăila, iunie 1968).

19.178. Un con circular drept are generatoarea de 10 cm și înălțimea de 8 cm. Să se afle: a) aria laterală, aria totală și volumul conului; b) aria și volumul sferei înscrisă în con.

(Brăila, august 1968 — cursuri serale).

19.179. Se dă expresia:

$$\left(\frac{0{,}5}{x^2 - 6x + 9} - \frac{1}{x^2 - 9} + \frac{0{,}5}{x^2 + 6x + 9}\right) : \frac{9}{x^2 - 9}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se aducă expresia la forma ceă mai simplă.

b) Notînd cu $E(x)$ forma cea mai simplă a expresiei, să se determine x astfel ca să avem $E(x) = \frac{1}{8}$.

(Brăila, august 1968 — cursuri serale).

19 180. Într-un trapez dreptunghic, baza mică și proiecția laturii neparalele pe baza mare sînt de cîte 9 cm. Aria trapezului este de 162 cm².

a) Să se afle perimetrul trapezului.

b) Să se arate că în acest trapez se poate înscrie un cerc.

(Brăila, septembrie 1968).

19.181. Se dă expresia:

$$E(x,y) = \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right] : \frac{x^3 + y^3}{x^2y^2}.$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă

b) Notînd cu $F(x,y)$, forma cea mai simplă a expresiei, să se determine x astfel ca $F(x,\ 2x+1) = \frac{3}{7}$.

(Brăila, septembrie 1968).

19.182. a) Să se afle valoarea expresiei numerice:

$$l = \frac{\left(3\frac{1}{3} \cdot 6{,}6 + 2 : 12{,}75\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{16}{17} + \frac{31}{51}\right)}{\left(75 : 4\frac{1}{6} - 3\frac{9}{23} \cdot 3\right) \cdot \left[0{,}2(7) + \frac{4}{15} + 0{,}35\right]} + \frac{9\frac{1}{3} : \frac{28}{33}}{1{,}25 \cdot \sqrt{31{,}36}}.$$

b) Într-un trapez dreptunghic, latura perpendiculară pe baze este egală cu $2l$, (l fiind valoarea expresiei de la punctul a)), iar baza mare și baza mică sînt respectiv x și y, soluțiile sistemului:

$$x - y = 8,\ \frac{(3x+2y)^2}{6} - \left(2x - \frac{1}{3}y\right)(y-3) = \frac{9x^2+4y^2}{6} + \frac{1}{3}y^2 + 93.$$

Să se calculeze aria totală și volumul corpului născut prin rotirea trapezului în jurul bazei mici.

(Buzău, iunie 1968).

19.183. Într-un paralelogram $ABCD$, latura BC și latura AB sînt respectiv valorile lui x și y din sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x-y+4}{2} - (x-y)^2 = 2(x+2)(y+1) - (x^2+y^2+44), \\ \frac{x+y}{8} - \frac{3x-y}{3} = \frac{x+y-4}{4} - \frac{x-y}{2} - 7. \end{cases}$$

Să se calculeze volumul și aria corpului obținut prin rotirea paralelogramului în jurul laturii BC, știind că diagonala AC este perpendiculară în A pe AB.

(Buzău, septembrie 1968).

Scanned with OKEN Scanner

19.184. Se dă expresia algebrică:

$$E(a) = 2a - \left(\frac{2a-3}{a+1} - \frac{a+1}{2-2a} - \frac{a^2+3}{2a^2-2}\right) \cdot \frac{a^3+1}{a^2-a}.$$

1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia dată.
2. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei date pentru:

$$a = \frac{\left[2\frac{3}{4} - 0{,}8(3)\right] : \sqrt{8{,}265625}}{3\frac{5}{6} - 1{,}375 - \left(5\frac{13}{24} - 3\frac{5}{12}\right)}.$$

(Buzău, septembrie 1968).

19.185. Într-un trapez $ABCD$, raportul dintre baze $\left(\frac{DC}{AB}\right)$ este $\frac{4}{5}$, iar înălțimea de 4 cm. Prelungind laturile neparalele, ele se întîlnesc în E.

a) Să se afle distanța EM, de la acest punct la baza mare a trapezului.

b) În punctul M se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului EAB, a cărei lungime SM reprezintă $\frac{3}{5}$ din AB. Notînd latura AB cu x și volumul piramidei $SABE$ cu y, să se exprime volumul piramidei în funcție de x.

c) Să se studieze variația acestui volum cînd x ia toate valorile admise și să se reprezinte grafic această variație.

(Cluj, iunie 1968).

19.186. Să se afle x din proporția: $\frac{x}{A} = \frac{B}{C}$, unde:

$$A = (1 - 3{,}5 : 5 \cdot 0{,}4) : \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{15}\right);\ B = (1 - 3 \cdot \sqrt{0{,}0625}) : \frac{1}{4} \cdot 15 \text{ și } C = \frac{A+B}{11}$$

Să se arate că valoarea lui x se exprimă printr-o fracție periodică și apoi să i se calculeze perioada.

(Cluj, iunie 1968).

19.187. a) Să se rezolve ecuația: $\frac{2x-1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left[2x - \frac{5(x+1)}{4}\right] + \frac{2+4x}{2} = \frac{3}{2}$.

b) O bară metalică de formă cilindrică are diametrul de 28 cm, iar înălțimea egală cu inversul rădăcinii ecuației date la punctul a), exprimată în cm. Din această bară se strunjesc conuri circulare drepte, avînd fiecare raza egală cu raza cilindrului și înălțimea cît $\frac{2}{15}$ din cea a cilindrului. Cîte astfel de conuri se pot obține prin strunjire? Ce procent reprezintă volumul conurilor obținute prin strunjire, din volumul barei?

(Cluj, septembrie 1968).

19.188. Să se calculeze:

$$\frac{\left(0{,}27 + \frac{2}{4} + 1\frac{1}{2}\right) : \left(2\frac{2}{5} - 3{,}2 \cdot \frac{3}{8}\right)}{\left(2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2} - 1\frac{3}{5} : \frac{1}{2}\right) \cdot 4}.$$

(Cluj, septembrie 1968).

Scanned with OKEN Scanner

19.189. O piramidă patrulateră regulată are apotema de x cm și apotema poligonului de bază de y cm. Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul piramidei, precum și aria triunghiului VAC format de diagonala AC a poligonului de bază și muchiile VA și VC ale piramidei. Valorile lui x și y se obțin prin rezolvarea următorului sistem:

$$\frac{x}{2a-b}-\frac{y}{2a+b}=\frac{8ab}{4a^2-b^2};\quad \frac{x}{2a-b}+\frac{y}{2a+b}=\frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2}.$$

Aplicație numerică pentru $a=2$ și $b=1$.

(Dîmbovița, iunie 1968).

19.190. Să se rezolve exercițiul:

$$\frac{\frac{4}{9}:\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}\right)-\frac{2}{9}+\frac{756{,}25:11}{3\frac{1}{2}:\frac{1}{14}-45}-\frac{7}{24}}{\left(2{,}75+1\frac{1}{4}\right):\left(14:\frac{7}{2}+\sqrt{20{,}25}\right):\frac{8}{17}}+\frac{0{,}6+0{,}425-\sqrt{0{,}000025}:\frac{1}{100}+\frac{1}{10}}{[30{,}(5)+3{,}(4)]:6\frac{4}{5}}$$

(Dîmbovița, iunie 1968).

19.191. Se dă un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu apotema de 5 cm, iar apotemele poligoanelor de bază, valorile rădăcinilor ecuației: $x^2-7x+10=0$. Se cere să se afle: aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

(Dîmbovița, septembrie 1968).

19.192. Să se rezolve exercițiul:

$$\frac{13:3\frac{3}{4}-10\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14}-\frac{29}{30}}{0{,}001:\frac{1}{20}+\sqrt{0{,}0064}}:\frac{\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-2:2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{32}}{\sqrt{0{,}000\,196}+0{,}086}.$$

(Dîmbovița, septembrie 1968).

19.193. Una din bazele unui trapez isoscel este egală cu 10 cm, iar înălțimea este de 4 cm și aria de 32 cm². La o distanță de 1 cm de baza dată se duce o paralelă la aceasta. Să se afle: a) raportul ariilor trapezelor formate; b) aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea trapezului dat în jurul bazei mici.

(Dolj, iunie 1968).

19.194. Să se aducă expresia:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

la forma cea mai simplă și să se afle valoarea ei numerică pentru:

$$a=\frac{3:\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{10}\right)^2:\left(0{,}15:2\frac{1}{2}\right)}{0{,}8^3\cdot 3{,}75+0{,}7-(5{,}3-\sqrt{15{,}0544})};\quad b=-3{,}5\ \text{și}\ c=\frac{1}{4}.$$

(Dolj, iunie 1968).

Scanned with OKEN Scanner

19.195. Un siloz pentru porumb, de formă cilindrică, înalt de 8 m, avînd diametrul bazei de 6 m, este prevăzut în interior cu un tub cilindric pentru aerisire, coaxial cu primul, de aceeaşi înălţime şi cu circumferinţa bazei de 1,57 m. Acoperişul este în formă de con cu diametrul bazei egal cu al silozului şi înălţimea de 2,25 m. Să se afle: a) volumul ce poate fi ocupat cu porumb, presupunînd că silozul se încarcă pînă la baza acoperişului; b) cîte foi de tablă s-au folosit pentru acoperiş, cunoscînd că o foaie are dimensiunile 0,7 m × 1,4 m, iar pentru îmbinări se consumă 10% din cantitatea totală de tablă.

(Dolj, septembrie 1968).

19.196. Să se aducă expresia:

$$E(x,y)=\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{y}}\right)\cdot\frac{\frac{x^2+y^2}{y}-x}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$$

la forma cea mai simplă şi să se afle valoarea ei numerică pentru:

$$x=10\,,\ y=\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)\cdot\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:0{,}16\right\}.$$

(Dolj, septembrie 1968).

19.197. Pentru o cantină şcolară s-au cumpărat 158 kg de zahăr şi $208\frac{1}{2}$ kg de orez, plătindu-se în total suma de 3090 lei. Dacă preţul unui kilogram de zahăr s-ar reduce cu 10% şi al unui kilogram de orez s-ar mări cu 5%, atunci întreaga cantitate de zahăr şi orez cumpărată ar costa 3031,20 lei. Cît costă un kilogram de zahăr şi cît costă un kilogram de orez?

(Hunedoara, iunie 1968).

19.198. Să se efectueze:

$$\frac{\left(27\frac{2}{5}-\sqrt{187{,}69}-4{,}9:1\frac{3}{4}\right):\frac{107}{10}+15\frac{5}{7}-2\frac{1}{4}\cdot3\frac{1}{2}}{26{,}9-2\cdot\left(2\frac{1}{4}-0{,}8\right)+\sqrt{2{,}6244}+\frac{1257}{1400}}.$$

(Hunedoara, iunie 1968).

19.199. Rădăcinile sistemului

$$\frac{3x-2}{4}-\frac{2y+5}{5}=x-y\,,\ \frac{x+6}{3}-\frac{y-3}{2}=y-2,$$

exprimate în decimetri, sînt: cea mai mare — latura poligonului de bază a unei piramide pătrate regulate, iar cea mai mică — apotema piramidei. Se cere: a) aria totală a piramidei; b) volumul piramidei.

(Hunedoara, septembrie 1968).

Scanned with OKEN Scanner

19.200 Să se efectueze:

$$\frac{\left[7\frac{2}{5}-4\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)\right]:\left[\left(2\frac{1}{5}-1\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{15}{26}+\frac{607}{90}\right]}{\left[3\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\right]:\frac{18}{65}}.$$

(Hunedoara, septembrie 1968).

19.201. O bucată de metal de forma unui paralelipiped dreptunghic se topeşte şi se toarnă într-o formă de prismă exagonală regulată. Dimensiunile paralelipipedului sînt proporţionale cu numerele 3, 5 şi 12, iar suma tuturor muchiilor este de 240 cm. Se cere: a) aria totală şi volumul bucăţii de metal; b) lungimea prismei exagonale, ştiind că latura bazei acesteia este de 4 cm.

(Iaşi, iunie 1968).

19.202. Să se efectueze:

$$\frac{1+\sqrt{0{,}014\,641}:\left(2\frac{2}{3}-1{,}75\right)\cdot 2\frac{3}{11}}{\left[\left(2-\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}2+\left(\frac{1}{3}-0{,}25\right)\cdot 4\right]\cdot\sqrt{2{,}25}+0{,}3}.$$

(Iaşi, iunie 1968)

19.203. Se dă un exagon regulat cu latura de 4 cm. Să se calculeze: a) aria exagonului; b) volumul corpului rezultat prin rotirea acestuia în jurul axei de simetrie ce trece prin mijlocul unei laturi.

(Iaşi, august 1968 — *cursuri serale).*

19.204. Să se rezolve exerciţiul:

$$\frac{\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot 1{,}2}{\sqrt{0{,}0121}+2\frac{89}{100}}+\frac{2\cdot\left(3{,}75+1\frac{2}{3}\right):2\frac{1}{6}}{1+0{,}5:\frac{3}{4}}.$$

(Iaşi, august 1968 — *cursuri serale).*

19.205. Se dă un exagon regulat cu latura de 4 cm. Să se calculeze: a) aria exagonului; b) volumul şi aria corpului rezultat prin rotirea acestuia în jurul axei de simetrie ce trece prin două vîrfuri opuse.

(Iaşi, septembrie 1968).

19.206. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x-1}{2}-\left(1-\frac{y+1}{3}\right)+1=x\,,\quad 1\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)+0{,}5\,y=y.$$

Să se verifice soluţia pe sistemul iniţial.

(Iaşi, septembrie 1968).

19.207. Se dă un triunghi dreptunghic la care se cunosc catetele, avînd 8 cm şi respectiv 6 cm. Să se calculeze aria şi volumul corpului rezultat prin rotirea triunghiului în jurul catetei mici.

(Iaşi, septembrie 1968 — *cursuri serale).*

Scanned with OKEN Scanner

19.208. Să se rezolve exercițiul:

$$\frac{1,5+3\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right):2\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+\sqrt{5,29}\cdot\frac{2}{23}+0,8}-1.$$

(Iași, septembrie 1968 — cursuri serale).

19.209. Se dă un dreptunghi cu lungimea de 40 cm. Știind că lățimea reprezintă 75% din lungime, să se calculeze aria și volumul corpului rezultat prin rotirea dreptunghiului în jurul axei de simetrie paralelă cu lățimea.

(Iași, septembrie 1968 — cursuri fără frecvență).

19.210. Să se rezolve exercițiul:

$$\frac{3,2+1\frac{2}{5}\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right):0-\frac{1}{5}}{1+\sqrt{13,69}\cdot1\frac{3}{37}-\frac{2}{5}}.$$

(Iași, septembrie 1968 — cursuri fără frecvență).

19.211. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4},\quad \frac{4x-7}{3}-\frac{3y-4}{4}-6=0.$$

Rădăcinile acestui sistem (exprimate în cm) reprezintă ipotenuza și una dintre catetele unui triunghi dreptunghic. Să se afle aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea acestui triunghi dreptunghic în jurul catetei cunoscute.

(Iași, septembrie 1968 — cursuri fără frecvență).

19.212. Să se calculeze:

$$\frac{2\cdot\left(4\frac{1}{4}-0,75\right)\sqrt{12,25}-4:\frac{12}{5}\cdot\frac{3}{5}}{2-\frac{3}{2}\left(2\frac{2}{3}-2\right)}.$$

(Iași, septembrie 1968 — cursuri fără frecvență).

19.213. Să se calculeze aria și volumul unui cilindru circular drept știind că dublul înălțimii este mai mare decît triplul razei cu 15 cm, iar înălțimea împreună cu raza totalizează tot 15 cm.

(Iași, septembrie 1968 — lic. economic — cursuri fără frecvență).

19.214. Să se rezolve exercițiul:

$$\frac{0,5+1\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}}{1+\sqrt{0,0289}\cdot5\frac{15}{17}}.$$

(Iași, septembrie 1968 — lic. economic — cursuri fără frecvență).

Scanned with OKEN Scanner

19.215. Trei brigăzi ale unei cooperative agricole de producție au cultivat zarzavaturi astfel: 20% din totalul primei brigăzi împreună cu 25% din totalul celei de a treia brigăzi totalizează 5 ha, aceasta reprezentînd tot atît cît 25% din totalul celei de a treia brigăzi împreună cu jumătate din totalul brigăzii a doua și tot atît cît $\frac{1}{11}$ din totalul primei brigăzi plus jumătate din totalul brigăzii a doua. Cîte hectare a cultivat fiecare brigadă?

(Iași, septembrie 1968 — Institutul pedagogic de învățători).

19.216. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{1 + 2\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) : 1,(3)}{7\frac{2}{4} + \sqrt{0,016\,384} : \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{3}{8}}$$

și

$$E_2 = 3\frac{1}{2} \cdot \left[0,1 + 1\frac{1}{5} \cdot \left(2\frac{1}{3} - 1\frac{3}{4}\right) \cdot 1\frac{3}{7} + 0,9\right] + 2.$$

Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a acestor expresii.

(Iași, septembrie 1968 — Institutul pedagogic de învățători).

19.217. Se dă un trapez isoscel cu baza mare de 40 cm, baza mică de 34 cm și o latură neparalelă de 5 cm. Să se calculeze: a) aria trapezului; b) volumul corpului rezultat prin rotirea trapezului în jurul bazei mici.

(Iași, septembrie 1968 — școli profesionale).

19.218. Să se rezolve exercițiul:

$$\frac{1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{0,0144} + 2\frac{22}{25}} : \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right].$$

(Iași, septembrie 1968 — școli profesionale).

19.219. Calculați aria totală și volumul unui cilindru știind că dublul razei împreună cu triplul înălțimii însumează 34 cm, iar înălțimea este mai mare decît raza cu 8 cm.

(Iași, septembrie 1968 — școli profesionale).

19.220. Să se rezolve exercițiul:

$$1\frac{1}{3} \cdot \left[1 + \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} : 0,75 - 1\frac{3}{4} \cdot \left(0,1 + \frac{9}{40}\right)\right].$$

(Iași, septembrie 1968 — școli profesionale).

19.221. Calculați aria totală și volumul unui con circular drept știind că raza acestuia este de 3 cm, iar înălțimea cu o unitate mai mare ca raza.

(Iași, septembrie 1968 — școli profesionale).

Scanned with OKEN Scanner

19.222. Să se calculeze x din proporția:

$$\frac{1+1\frac{1}{2}:0{,}5}{5}=\frac{x}{4\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}\cdot 0{,}2}.$$

(Iași, septembrie 1968 — școli profesionale).

19.223. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt proporționale cu numerele 6 și 8; jumătatea uneia dintre catete, mărită cu $\frac{2}{3}$ din cealaltă și cu încă 10 cm este egală cu suma lor mărită cu 4. Să se afle volumul și aria corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei.

(Ilfov, iunie 1968).

19.224. Să se efectueze:

$$\frac{1-\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{4}+3:1\frac{1}{5}}{\left(\frac{13}{2}-2\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot 1\frac{3}{7}}-\frac{1+\frac{4}{2-\frac{2}{5}}}{7-\frac{2}{1-\frac{2}{3}}}.$$

(Ilfov, iunie 1968).

19.225. Știind că razele bazelor unui trunchi de con sînt date de soluția sistemului de ecuații:

$$\frac{x+y}{3}+x=15\ ,\ y-\frac{y-x}{5}=6,$$

iar generatoarea este dată de: $G=\frac{2x+3y}{5}$ (unde x și y sînt aflați prin rezolvarea sistemului), se cere să se afle: a) aria laterală a trunchiului de con; b) aria totală a trunchiului de con. (Lungimile sînt date în cm.)

(Ilfov, septembrie 1968).

19.226. Să se efectueze operațiile:

$$\left(3\frac{2}{3}+1\frac{7}{10}\right):8\frac{1}{20}-\left(2\frac{7}{23}-1\frac{45}{46}\right)\cdot\frac{23}{45}-\frac{1}{2}.$$

(Ilfov, septembrie 1968).

19.227. Se dă un trapez $ABCD$ cu bazele AB și CD $(AB>CD)$. Bazele trapezului, exprimate în centimetri, sînt egale cu valorile lui x și y obținute prin rezolvarea sistemului:

$$(x+y-1)^2-(x-y)(x+y)+63=2y(y+2)\ ,\ \frac{2x-y}{7}-\frac{2y-x}{4}+9=y.$$

Unghiul A, exprimat în grade, este egal cu soluția pozitivă a ecuației $2A.\ (A-44)+1=(A+1)^2$. Lungimea laturii AD este de 0,6 dm.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se afle aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

b) Să se compare aria totală a trunchiului de con care are $R = 8$ cm, $r = 6$ cm și $G = 10$ cm, cu aria calculată mai sus.

c) Prelungirile laturilor neparalele ale trapezului se intersectează în punctul P. Să se afle perimetrul triunghiului PCD.

(Mehedinți, iunie 1968).

19.228. Să se calculeze expresia:

$$\frac{2{,}5 + 3\frac{1}{3} \cdot \left(5 + 0{,}4 \cdot \frac{5}{8}\right) - 5 : 2\frac{1}{2}}{24 : 6{,}4 - \left(12 : 3\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) \cdot 0{,}5 - \sqrt{1{,}5625}}.$$

(Mehedinți, iunie 1968).

19.229. Într-un triunghi dreptunghic, diferența dintre $\frac{3}{5}$ din ipotenuză și $\frac{2}{3}$ dintr-o catetă este de 3 cm, iar aceeași catetă, luată în întregime, este cu 6 cm mai mică decît ipotenuza. Să se calculeze aria și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei.

(Mehedinți, septembrie 1968).

19.230. Să se efectueze

$$\frac{\left(3\frac{1}{2} - 1\right) : 5 + \left(5\frac{3}{4} - 2\right) : 6 + \left(4\frac{7}{9} - 3\right) : 5\frac{1}{3} - \frac{11}{24}}{2\frac{1}{5} + \frac{1}{1\frac{1}{3}} - \sqrt{3{,}8025}}.$$

(Mehedinți, septembrie 1968).

19.231. Fie ecuația $\frac{x}{x-2} = \frac{6}{x-1}$; $(x \neq 1,\ x \neq 2)$.

Rădăcinile ecuației sînt catetele unui triunghi dreptunghic.

Să se afle volumul și aria corpului care ia naștere prin rotirea triunghiului în jurul unei drepte care trece prin vîrful unghiului drept al triunghiului și este paralelă cu ipotenuza triunghiului.

(Mureș, iunie 1968).

19.232. Să se efectueze operațiile:

$$\frac{\left(\frac{5}{14} + \frac{17}{21} + \frac{3}{7}\right) : 11\frac{1}{6} + \frac{72}{77} \cdot \left(2\frac{2}{3} - 1{,}75\right)}{\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(22\frac{1}{3} - \frac{7}{3}\right)} + 0{,}(6).$$

(Mureș, iunie 1968).

19.233. Pe un lot experimental s-au cultivat garoafe pentru parfum, obținîndu-se 18 kg de semințe pe un ar. Semințele prin uscare, pierd 12% din greutate, iar pro-

Scanned with OKEN Scanner

ducţia de ulei este de 46 kg din 100 kg de seminţe. Uleiul este depozitat în flacoane paralelipipedice cu dimensiunile interioare de 4 cm, 8 cm şi 10 cm. Ştiind că 1 dm³ de ulei cîntăreşte 900 g, se cere să se afle cîte flacoane sînt necesare pentru depozitarea uleiului obţinut de pe o suprafaţă de 10 ari.

(Mureş, septembrie 1968 — licee de specialitate).

19.234. O foaie metalică, dreptunghiulară, are dimensiunile (exprimate în dm) egale cu soluţiile ecuaţiei:

$$\frac{(x-12)^2}{6} - \frac{x}{9} + \frac{x(x-9)}{18} = \frac{(x-14)^2}{2} + 5.$$

Din această foaie se confecţionează căni cilindrice cu diametrul de 8 cm şi înălţimea de 10 cm.

a) Cîte căni se pot obţine, dacă 12% din suprafaţa foii metalice nu poate fi folosită şi 912 cm² se pierd la îndoituri?

b) Capacele circulare ale acestor căni se fac dintr-o altă foaie metalică, în formă de pătrat. Capacul depăşeşte marginea cănii cu 1 cm. Să se afle latura patratului minim din care putem face toate capacele şi să se exprime în procente partea din suprafaţa foii ce nu poate fi folosită.

(Sibiu, iunie 1968).

19.235. Să se restringă expresia

$$E = \frac{a+2b}{3a-3b} - \frac{3c-a}{2a-2c} + \frac{a^2-bc}{a^2-ac+bc-ab}$$

şi să se afle valoarea ei numerică pentru $a = \frac{1}{8}$, $b = 3\frac{2}{5} : \frac{34}{35} - 0{,}375$.

(Sibiu, iunie 1968).

19.236. O piesă metalică are forma unui trunchi de con cu diametrul mare de 24 cm. Raportul ariilor bazelor este $\frac{9}{4}$, iar înălţimea reprezintă $33\frac{1}{3}\%$ din raza bazei mari. Densitatea metalului este 7,8 g/cm³. Să se calculeze: a) unghiul format de generatoare cu baza mică; b) aria totală a trunchiului de con. c) Prin tăiere, din această piesă se obţine un trunchi de piramidă patratică de volum maxim. Să se afle masa metalului înlăturat.

(Timiş, iunie 1968).

19.237. Se dau expresiile: $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x-2}$, $g(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1+x}$, $h(x) = \frac{(x+1)^2-2x}{x^4-1}$.

Se cere: a) Să se calculeze $F(x) = \frac{1+f(x)}{\frac{1}{2\cdot g(x)} - 1} + 5 \cdot h(x)$, unde $f(x)$, $g(x)$ şi $h(x)$ sînt expresiile de mai sus aduse la forma cea mai simplă.

b) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei $F(x)$, dacă x este soluția ecuației:

$$x : \frac{(0{,}6 + 0{,}425 - \sqrt{0{,}000\,025}) : \frac{1}{100}}{30{,}(5) + 3{,}(4)} + 2 = 1.$$

c) Pentru ce valori ale lui x, expresia de la punctul a) este egală cu 2?

(Timiș, iunie 1968).

19.238. Un con circular drept are raza de 18 cm, generatoarea reprezintă $\frac{5}{3}$ din raza bazei. Acest con se secționează cu un plan paralel cu baza, al cărui diametru este 24 cm. Se formează astfel două conuri.

a) Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con format.

b) Cît la sută din volumul conului mic reprezintă volumul conului mare?

(Timiș, septembrie 1968).

19.239. Se dau expresiile:

$$E_1(x) = \frac{1 - \frac{3x^2}{1 - x^2}}{1 + \frac{x}{1 + x}}, \quad E_2(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} - \frac{2x - 1}{1 - x},$$

$$E_3(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{(3x - 1)^2}{5} - \frac{(x + 3)^2}{5} + \frac{x(2x - 3)}{2}\right].$$

a) Să se arate că $E_1(x) + E_2(x)$ nu depinde de x.

b) Să se calculeze valoarea expresiei $F(x) = \frac{E_1(x)}{E_2(x)} - 2$, cînd x este soluția ecuației:

$$1\frac{1}{7} + \frac{55}{16} : \frac{\sqrt{756{,}25}}{1\frac{1}{2}x - 9} \cdot \frac{4}{7} \cdot 1{,}(3) = 2.$$

c) Pentru ce valori ale lui x media aritmetică a expresiilor $E_1(x)$ și $E_2(x)$ este egală cu $E_3(x)$?

(Timiș, septembrie 1968).

19.240. Se dă sistemul:

$$\frac{2x - 3y}{5} - \frac{2y - 3x}{11} = \frac{112}{55}, \quad (x - 5)^2 - (3 - y)^2 = (x - y)(x + y) - 48.$$

Rădăcinile acestui sistem reprezintă apotema și înălțimea unei piramide patrulatere regulate. Să se afle aria laterală, aria totală și volumul acestei piramide.

(Vaslui, iunie 1968).

Scanned with OKEN Scanner

19.241. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$\frac{3\frac{1}{4}+\left[2\frac{2}{3}+0,(3)\right]:0,252\cdot\frac{21}{500}+2,3(4):\left(4\frac{1}{9}-2\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{163}{211}}{\left[\left(4\frac{3}{4}+1,125\cdot\right)\frac{16}{141}:0,(12)-\frac{3}{8}\right]:1\frac{3}{38}}.$$

(Vaslui, iunie 1968).

19.242. Diagonalele unui trapez isoscel se intersectează în punctul O.

a) Să se afle distanţele de la O la baza mare şi la baza mică a trapezului ştiind că aceste distanţe sînt direct proporţionale cu numerele 8,5 şi 3,5 şi că $\frac{2}{5}$ din distanţa la baza mare este cu 4 cm mai mare decît 40% din distanţa la baza mică.

b) Dacă baza mică a trapezului este de 14 cm, latura neparalelă de 26 cm şi perimetrul de 100 cm, să se afle unghiul format de o diagonală cu baza mare şi să se deducă apoi că diagonalele sînt perpendiculare.

c) Pe perpendiculara în O pe planul trapezului se ia un punct V aşa încît $OV = 40$ cm. Să se afle volumul piramidei care are ca bază trapezul dat şi ca vîrf punctul V.

(Municipiul Bucureşti, iunie 1968).

19.243. Se dau expresiile:

$$a = 4x^2 + (8x^3 - 1)\cdot\left(\frac{2x + 4x^2}{4x^2 - 1} - \frac{2x + 1}{2x - 1}\right) \text{ şi}$$

$$b = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile.

2) Să se arate apoi că $ab - a + b + 1 = 0$, pentru orice valoare a lui x pentru care a şi b au sens.

(Municipiul Bucureşti, iunie 1968).

19.244. Se dă triunghiul echilateral ABC. Fie D mijlocul laturii AB şi E mijlocul lui AC. Pe prelungirea segmentului DE se ia punctul F aşa încît $EF = DE$.

a) Să se arate că patrulaterul $ADCF$ este un dreptunghi.

b) Să se calculeze volumul corpului format prin rotirea trapezului dreptunghic $ABCF$ în jurul bazei mari AB, latura triunghiului echilateral fiind de 4 cm.

(Municipiul Bucureşti, septembrie 1968).

19.245. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(a, b) = \frac{2a + b}{a + b} - \frac{a - 2b}{a - b} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

şi apoi să se calculeze valoarea ei numerică ştiind că a şi b sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$\frac{3x + 1}{x} - 1 = \frac{3}{2x - 1}, \text{ iar } a > b.$$

(Municipiul Bucureşti, septembrie 1968).

Scanned with OKEN Scanner

19.246. Un teren are forma unui trapez dreptunghic. Baza mare, baza mică și latura oblică a acestui trapez sînt direct proporționale, respectiv cu numerele 7, 4 și 5, iar suma lor este 80 hm.

Acest teren este cultivabil, în afară de 2 ha ocupate cu diferite construcții. Suprafața cultivabilă se desparte în trei loturi pentru trei culturi diferite; primul lot reprezintă 45% din această suprafață, iar cel de al doilea $\frac{3}{5}$ din restul ei.

Să se afle, în ha: a) aria întregului teren; b) aria fiecăruia din cele trei loturi cultivate.

(Subiect unic pe țară, iunie 1969).

19.247. a) Să se descompună în factori expresiile:

$$E_1(x) = (2x - 1)(x - 5) + 2(1 - 2x) + 4x^2 - 1 ,$$
$$E_2(x) = 9x^3 - 36x^2 + 36x$$

și să se simplifice fracția: $\frac{E_1(x)}{E_2(x)}$.

b) Să se calculeze valorile lui x pentru care fracția $\frac{2x - 1}{3x(x - 2)}$ ia valoarea $\frac{1}{5}$.

(Subiect unic pe țară, iunie 1969).

19.248. Pentru construirea unui nou cartier s-a prevăzut o anumită suprafață de teren. 80% din această suprafață este destinată pentru construirea locuințelor; $\frac{3}{8}$ din suprafața rămasă este rezervată pentru terenurile de sport, o suprafață de $1\frac{1}{3}$ ori mai mare decît cea a terenurilor de sport este prevăzută pentru amenajarea unui parc, iar pe restul suprafeței, în formă de dreptunghi cu lungimea de 6 dam și diagonala de 7,5 dam, se vor construi un cămin de zi și o creșă.

Se cere să se afle: a) suprafața prevăzută pentru construirea căminului de zi și a creșei; b) suprafața întregului teren; c) suprafețele rezervate pentru: locuințe, terenuri de sport, parc.

(Subiect unic pe țară, septembrie 1969).

19.249. a) Să se simplifice fracțiile:

$$E_1(x) = \frac{ax + a - x - 1}{ax - x - a + 1} \quad \text{și} \quad E_2(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{3x^2 - 3} .$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{2(x - 1)}{3(x + 1)} = \frac{5}{3} .$$

(Subiect unic pe țară, septembrie 1969).

19.250. Depășind norma cu 5 piese pe zi, un strungar realizează în 6 zile 510 piese de același fel.

a) Care este norma zilnică a strungarului?

b) Cu cît la sută își depășește zilnic norma?

c) Cîte piese ar fi realizat strungarul în 12 zile dacă depășirea zilnică a normei ar fi fost de 15%?

(Sibiu, septembrie 1969 — cursuri fără frecvență).

Scanned with OKEN Scanner

19.251. Să se calculeze expresia

$$E(a,b) = \left[\frac{8a}{a^2 - 36b^2} + \frac{17a + 6b}{(a - 6b)^2}\right] : \left(5 + \frac{36b}{a - 6b}\right)^2$$

și apoi să se afle valoarea ei numerică pentru:

$$a = \left(2\frac{2}{5} - 3{,}2 \cdot \frac{3}{8}\right) : 0{,}15 \text{ și } b = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right).$$

(Sibiu, septembrie 1969 — cursuri fără frecvență).

19.252. O cooperativă agricolă de producție și-a repartizat suma de 1 060 000 lei astfel: pentru recuperarea de terenuri neproductive 30%; pentru mașini agricole de $1\frac{23}{30}$ ori mai puțin decît pentru aceste terenuri; pentru transporturi $\frac{2}{3}$ din suma alocată pentru procurarea de mașini; pentru administrația C.A.P. 0,375 din fondurile rezervate pentru mașini și transporturi; pentru îngrășăminte 90% din suma afectată pentru administrație, iar restul s-a repartizat invers proporțional cu fracțiile $\frac{6}{7}$ și $\frac{1}{3}$, respectiv pentru cercetări științifice și lucrări de interes social și cultural.

Se cere să se afle ce sume au fost acordate pentru: a) recuperarea de terenuri neproductive; b) mașini agricole; c) transporturi; d) administrație; e) îngrășăminte; f) cercetări științifice; g) lucrări de interes social și cultural.

(Subiect unic pe țară, iunie 1970).

19.253. a) Să se efectueze următoarele operații:

$$\left(\frac{x}{x - y} + \frac{y}{x + y}\right) : \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}.$$

b) Să se afle valoarea numerică a rezultatului operațiilor de mai sus știind că valorile lui x și y formează soluția sistemului următor:

$$\frac{2x + y}{5} - \frac{x + 2y}{8} = 1\,, \quad \frac{2x - y}{6} + \frac{x - 2y}{7} = 1.$$

(Subiect unic pe țară, iunie 1970).

19.254. Acoperișul unui turn are forma unui con circular drept. Suma dintre pătratul razei cercului de bază a conului și dublul acestei raze este de 6,84, iar înălțimea conului este egală cu $\frac{2}{3}$ din diametrul cercului de bază. La o distanță de vîrful conului egală cu $\frac{1}{6}$ din înălțimea lui, se construiește un planșeu obținîndu-se astfel o încăpere în formă de trunchi de con. (Raza, înălțimea și generatoarea conului se exprimă în m).

Se cere să se calculeze: a) Cîți m² de tablă sînt necesari pentru învelirea acoperișului? b) Volumul încăperii obținute?

(Subiect unic pe țară, septembrie 1970).

19.255. Se dă expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x - 1}{x^2 - 4} - \frac{x}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2}\right) : \frac{7x}{x - 2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se aducă expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Să se calculeze valoarea ei pentru:

$$x = \left(2\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot 2\frac{2}{5} - \frac{\sqrt{5,76}}{0,6}.$$

(Subiect unic pe țară, septembrie 1970).

19.256. Se dau două cercuri C și C' cu centrele în O și O' și razele respectiv $R = 4$ cm, $R' = 3$ cm; cele două cercuri se intersectează în punctele A și B.

a) Fie M punctul diametral opus cu A în cercul C și N punctul diametral opus cu A în cercul C'. Să se demonstreze că punctele M, B, N sînt pe aceeași dreaptă (colineare).

b) Să se calculeze raportul dintre ariile triunghiurilor AOO' și AMN.

c) Presupunînd triunghiul OAO' dreptunghic în A, să se calculeze:

1) Segmentul OO' și valoarea raportului $\frac{OP}{PO'}$ (punctul P fiind intersecția dreptei AB cu OO').

2) Aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului AMN în jurul catetei AM.

(Subiect unic pe țară, iunie 1971).

19.257. Fie:

$$E(x) = \frac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{5x}{2x^2 + 3x} - \frac{20x}{9 - 4x^2}.$$

a) Să se aducă $E(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Să se găsească mulțimea valorilor lui x pentru care $E(x)$ este un număr întreg și pozitiv.

c) În raport cu un sistem de axe ortogonale să se reprezinte grafic funcția

$$y = \frac{2x - 3}{9}.$$

(Subiect unic pe țară, iunie 1971.)

19.258. Volumul unui trunchi de piramidă cu baze pătrate este de 7 ori mai mare decît volumul unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 7 dm, lățimea de 40 cm și înălțimea de 0,3 m; înălțimea trunchiului de piramidă este de 4 dm, iar latura bazei mici este de $2\frac{1}{4}$ ori mai mare decît această înălțime.

Se cere să se calculeze: a) volumul trunchiului de piramidă; b) latura bazei mari; c) aria laterală a trunchiului; d) la ce distanță de planul bazei mari trebuie făcută o secțiune paralelă cu bazele, astfel încît aria acestei secțiuni să fie egală cu 144 dm^2.

(Subiect unic pe țară, septembrie 1971)

19.259. Se dă expresia:

$$E(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} : \left[\frac{1}{x^2} + \frac{x + 1}{x(x - 1)^2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\right] - 2x + 3$$

a) să se aducă $E(x)$ la forma cea mai simplă;

b) să se găsească valorile lui x pentru care $E(x)$ este egală cu 5.

(Subiect unic pe țară, septembrie 1971).

Scanned with OKEN Scanner

Soluţii, răspunsuri şi indicaţii la exerciţii şi probleme

Aritmetica

Capitolul I

1.1. In total au avut $80 + 90 + 110 + 115 + 125 = 520$ (lei).

Au cheltuit $520 - 120 = 400$ (lei).

Fiecare a cheltuit cîte $400 : 5 = 80$ (lei).

Cel care a avut 80 lei a cheltuit 80 lei, deci nu mai primeşte nimic. Ce cu 90 lei, mai primeşte $90 - 80 = 10$ (lei); cel cu 110 lei primeşte $110 - 80 = 30$ (lei); cel cu 115 lei primeşte $115 - 80 = 35$ (lei), iar cel cu 125 lei primeşte 45 lei.

1.2. Al doilea va primi $72 + 59 - 100 = 131 - 100 = 31$ (lei). Primul va primi $72 - 31 = 41$ (lei), iar ultimul $59 - 31 = 28$ (lei).

Verificare: $31 + 28 = 59$; $41 + 31 + 28 = 100$; $41 + 31 = 72$.

1.3. 85, 58 şi 57 lei.

Verificare: $85 + 58 = 143$; $58 + 57 = 115$; $85 + 58 + 57 = 200$.

1.4. 8 ore $\cdot$ 25 = 200 ore.

1 800 lei : 200 = 9 lei pe oră.

Deci ar primi 9 lei $\cdot$ 10 $\cdot$ 6 = 540 lei.

1.5. Alungirea de 3,4 mm se produce la o încălzire cu: $40° - 15° = 25°$C.

Dacă se ridică (sau se coboară) temperatura cu un singur grad, atunci alungirea (scurtarea) este de 3,4 mm : 25 = 0,136 mm.

Pentru o răcire de la 15° la $-30°$ (adică cu 45°), şina se va scurta cu: 0,136 mm $\cdot$ $\cdot$ 45 = 6,12 mm.

Scanned with OKEN Scanner

1.6. Vor fi acceptate axele de dimensiunile: 56,7, 56,5 și 56,4, iar cel cu diametrul de 56,9 poate i corectat la strung, continuîndu-se să se micșoreze raza cu $0,3 : 2 = 0,15$ (mm), pentru a obține diametrul de 56,6 mm.

1.7. $54,7 - 0,2 = 54,5$ și $54,7 + 0,2 = 54,9$.

Axele cu diametrele necuprinse între 54,5 și 54,9 în total 3, nu pot fi acceptate fără modificări, adică cele cu diametre de 55,1, 54,4 și 55 mm. Axele cu diametrele de 55,1 și 55 mm, prn micșorare la strung, se mai pot corecta, dacă se aduc la dimensiunile admise, celălalt ax (cu diametrul de 54,4 mm) nu mai poate fi corectat la strung.

1.8. Dintre numerele de două cifre numai numărul 22 are cifra 2 de 2 ori.

Numerele de 3 cifre au cifra de 2 ori astfel:

a) la zeci și unități (122,322,422, ... , 922),

b) la sute și unități (202, 212, 232, ... , 292),

c) la sute și zeci (220, 221, 223, ... , 229).

Avem deci suma:

$(22 + 122 + 322 + \ldots + 922) + (202 + 212 + 232 + \ldots + 292) + (220 + 221 + 223 + \ldots + 229) = (9 \cdot 22 + 100 + 300 + \ldots + 900) + (9 \cdot 202 + 10 + 30 + \ldots + 90) + (9 \cdot 220 + 1 + 3 + \ldots + 9) = (198 + 4\,300) + (1\,818 + 430) + (1980 + 43) = 4\,498 + 2\,248 + 2\,023 = 8\,769.$

1.9. Pentru paginile de cîte o cifră trebuie 9 cifre. Pentru paginile de cîte două cifre, trebue $(99 - 9) \cdot 2 = 180$ (cifre).

Mai rămîn $2\,322 - 180 - 9 = 2\,133$ (cifre).

Cu 2 133 cifre se pot pagina, cu cîte 3 cifre:

$$2\,133 : 3 = 711 \text{ (pagini)}.$$

Dicționarul a avut $9 + 90 + 711 = 810$ (pagini).

1.10. Cartea are 440 de pagini.

1.11. Pînă a începe iarăși cu degetul cel mare, care este al 9-lea, au fost 8 numărări.

1 965 împărțit la 8 dă cîtul 245 și restul 5, iar al cincilea după fiecare repetare este degetul mic, deci pe degetul mic cade 1965.

1.12 Umplem vasul de 9 dm^3 și din el turnăm în cel de 4 dm^3 pînă îl umplem. În vasul de 9 dm^3, vor mai rămîne 5 dm^3. Golim vasul de 4 dm^3 și turnăm din nou în el, din cel de 9 dm^3, pînă îl umplem. În vasul de 9 dm^3 rămîne 1 dm^3. Golim iarăși vasul de 4 dm^3 și punem în el 1 dm^3 din vasul de 9 dm^3. Vasul de 9 dm^3, care rămîne gol, îl umplem. Punem din el apă pînă umplem vasul de 4 dm^3, în care deja se mai afla 1 dm^3 de apă, deci în vasul de 9 dm^3 rămîn numai 6 dm^3.

1.13. Numărul total al strîngerilor de mînă la un moment dat este par, căci o strîngere de mînă presupune doi oameni. Numărul oamenilor care au efectuat un număr impar de strîngeri de mînă nu poate fi impar, căci adunînd numerele tuturor strîngerilor de mînă efectuate de acești oameni, vom obține un număr impar.

Scanned with OKEN Scanner

Acest număr impar adăugat la numărul par de strîngeri de mînă efectuate de ceilalţi oameni, ne-ar da un număr impar, ceea ce contrazice constatarea iniţială.

1.14. *a)* Se aşază patru bile pe un platan şi patru pe celălalt platan. Cea mai grea se află în platanul înclinat. *b)* Se scot bilele de pe platanul de sus şi se mută în locul lor 2 bile din cele de pe platanul de jos. Platanul pe care se află bila mai grea se va înclina din nou. *c)* Se compară apoi numai cele două bile de pe platanul de jos şi se găseşte bila mai grea.

1.15. Se cîntăresc 300 g la prima cîntărire cu $200 + 50 + 50 = 300$. La a doua cîntărire se cîntăresc 600 g, folosind cele 300 g struguri + 300 g greutăţi. Deci din două cîntăriri se pot forma $600 + 300 = 900$ g struguri. La a treia cîntărire se pot cîntări 1 100 g (900 g struguri + 200 g). Cele 1 100 g struguri, împreună cu strugurii de pe platanul celălalt, fac împreună 2 kg.

1.16. Dacă în prima clădire sînt cu 10 muncitori mai mult decît în a patra, iar în a patra cu 8 muncitori mai mult decît în a treia, atunci în prima clădire sînt cu 18 muncitori mai mult decît în a treia. Raţionînd mai departe observăm că în clădirea a treia este cel mai mic număr de muncitori.

Adunînd, de la fiecare clădire, numărul cu care întrece numărul de muncitori din a treia, avem $18 + 10 + 8 = 36$. Dacă scădem 36 din 436 vom găsi de patru ori numărul de muncitori din clădirea a treia. $436 - 36 = 400$ şi împărţind apoi la 4 vom găsi numărul muncitorilor din clădirea a treia $400 : 4 = 100$. În prima clădire sînt $100 + 18 = 118$ muncitori, în a doua $100 + 10 = 110$, iar în a patra $100 + 8 = 108$ muncitori.

1.17. Viteza bărcii în sensul apei este de $48 : 2 = 24$(km/oră).
Viteza apei este de $24 - 20 = 4$ (km/oră).
Viteza bărcii împotriva apei este de $20 - 4 = 16$ (km/oră).
La înapoiere, barca va face $48 : 16 = 3$ (ore).

1.18. Pînă la locul întîlnirii, fiecare tren parcurge cîte $480 : 2 = 240$ (km). Această distanţă este parcursă de trenul personal în $240 : 40 = 6$ (ore). Trenurile se vor întîlni la ora $12 + 6 = 18$. Pînă la această oră, trenul accelerat a mers timp de $18 - 14$ (ore) $= 4$ (ore), iar viteza lui medie este de $240 : 4 = 60$ (km/oră).

1.19. 60 km/oră.

1.20. 120 km/oră.

1.21. Primul automobil va parcurge o distanţă egală cu jumătate din distanţa AB plus 30 km; iar cel de-al doilea o distanţă egală cu jumătate din AB minus 30 km, deci diferenţa drumurilor parcurse este $30 + 30 = 60$ (km). Această diferenţă de drum este datorită diferenţei de viteză de $75 - 60 = 15$ (km/oră).

Timpul în care s-a executat mişcarea este $t = 60 : 15 = 4$ (ore). Distanţa AB este egală cu distanţa parcursă de primul automobil în patru ore cu viteza de

Scanned with OKEN Scanner

75 km/oră, adunat cu cea parcursă de al doilea, tot în 4 ore, cu viteza de 60 km/oră.

$$AB = 4 \cdot 75 + 4 \cdot 60 = 4(75 + 60) = 4 \cdot 135 = 540 \text{ (km)}.$$

1.22. La ora 8 primul automobil, care parcursese 40 km, se găsea la 20 km de Ploieşti, în momentul în care al doilea automobil pornea spre Bucureşti. Cele două automobile se apropie unul de celălalt cu viteza de $40 + 60 = 100$ (km/oră). Distanţa dintre ele (20 km) va fi parcursă în $20 : 100 = 0{,}2$ ore $= 12$ minute. Întîlnirea va avea loc deci la ora 8 şi 12 minute, la distanţa de $60 \cdot 0{,}2 = 12$ (km) de Ploieşti.

1.23. *a*) 6 ore; *b*) 1 oră 25 min.

1.24. Pentru hrana întregului oraş pe timp de un an sînt necesare în total:

$$\frac{1\,944\,000 \cdot 365 \cdot 7}{12} = 413\,910\,000 \text{ (pîini)}.$$

Din grîul recoltat de pe un hectar se pot fabrica:

$$\frac{25 \cdot 84 \cdot 73 \cdot 46}{92 \cdot 25} = 2\,190 \text{ (pîini)}.$$

Rezultă că este necesară recolta de pe:

$$\frac{413\,910\,000}{2\,190} = 189\,000 \text{ (hectare)}.$$

1.25. Deoarece a terminat cu patru zile înainte de termen, în cele 20 de zile a produs mai mult decît a avut planificat cu $15 \cdot 4 = 60$ (piese). Rezultă că în fiecare zi a produs peste plan $60 : 20 = 3$ (piese).

1.26. 80 de piese.

1.27. Al doilea număr este de 7 ori primul număr. Al treilea număr este de 9 ori cît al doilea număr, plus 6. Deci al treilea număr este de $9 \cdot 7 = 63$ ori cît primul, plus 6. Prin urmare, exprimînd suma celor trei numere în funcţie de primul număr, avem: 1 000 este de $1 + 7 + 63 = 71$ ori primul, plus 6. Adică $1\,000 - 6 = 994$ este de 71 de ori primul număr. De unde primul număr $994 : 71 = 14$; al doilea număr $7 \cdot 14 = 98$, iar al treilea număr $63 \cdot 14 + 6 = 888$.

1.28. Dacă primul număr este media aritmetică a celorlalte două, atunci suma acestor două este egală cu dublul primului, iar suma tuturor celor trei este triplul primului. *Rezultă că primul număr este* $30 : 3 = 10$.

Dacă suma primului număr cu dublul celui de-al doilea întrece cu 2 suma celui de-al doilea cu triplul celui de-al treilea, rezultă că dublul celui de-al doilea este cu 8 mai mic decît suma celui de-al doilea cu triplul celui de-al treilea sau că al doilea este cu 8 mai mic decît triplul celui de-al treilea.

Dacă triplul celui de-al treilea este cît al doilea adunat cu 8, rezultă că de 4 ori cel de-al treilea este cît suma dintre al doilea şi al treilea, mărită cu 8.

Scanned with OKEN Scanner

Dar cum suma dintre al doilea și al treilea este $30 - 10 = 20$, rezultă că de 4 ori cel de-al treilea este $20 + 8 = 28$. *Al treilea este deci* $28 : 4 = 7$, *iar al doilea* $20 - 7 = 13$.

Verificare: $10 + 13 + 7 = 30$; $10 + 2 \cdot 13 - 2 = 13 + 3 \cdot 7$; $10 = (13 + 7) : 2$.

1.29. Știind că s-a vîndut de trei ori mai multă făină decît fasole, înseamnă că la trei kg de făină se ia unul de fasole, deci cînd se dă $4 \cdot 3 = 12$ (lei) pe făină se dă 4,80 lei pe fasole, în total 16,80 lei. Apoi, $840 : 16{,}80 = 50$ (kg) fasole și $50 \cdot 3 = 150$ (kg) făină.

1.31. Primul strung face $360 \cdot 60 = 21\,600$ turații pe oră și realizează $21\,600 : 900 = 24$ piese. Al doilea strung face $270 \cdot 60 = 16\,200$ turații pe oră și realizează $16\,200 : 900 = 18$ piese. Al treilea strung face $240 \cdot 60 = 14\,400$ turații pe oră și realizează $14\,400 : 900 = 16$ piese. În total, într-o oră, cei trei strungari au realizat $24 + 18 + 16 = 58$ piese.

1.32. Primul tren (cel plecat din A) a mers timp de $18 - 8 = 10$ ore, iar al doilea $18 - 6 = 12$ ore și au parcurs împreună distanța de 1060 km.

Dacă primul tren ar fi mers tot cu viteza celui de-al doilea, ar fi străbătut, în cele 10 ore de mers, cu $15 \cdot 10 = 150$ km mai mult.

Rezultă că distanța de $1\,060 + 150 = 1\,210$ km este parcursă în $10 + 12 = 22$ ore mergînd cu viteza trenului al doilea, adică cu $1\,210 : 22 = 55$ km/oră.

Viteza primului tren este de $55 - 15 = 40$ km/oră.

1.33. În trei ore de mers, Costel parcurge cu 3 km mai mult decît Ionel. Ionel în a 4-a oră face și el cei 3 km, astfel că viteza lui Ionel este 3 km/h, iar a lui Costel de 4 km/h.

1.34. Dacă a doua zi ar fi produs și șuruburi mici tot de 3 ori mai multe decît în prima zi, atunci numărul total de șuruburi produse în a doua zi ar fi fost de 3 ori mai mare decît cel din prima zi și deci cu $(4-3) \cdot 600 = 600$ mai puține decît a produs în realitate.

Cele 600 de șuruburi reprezintă de $6 - 3 = 3$ ori producția de șuruburi mici din prima zi. Numărul de șuruburi mici produse în prima zi este de $600 : 3 = 200$, iar cel de șuruburi mari de $600 - 200 = 400$.

În a doua zi s-au produs 1 200 de șuruburi mari și 1 200 de șuruburi mici.

1.35. Pentru aratul jumătății a doua a tarlalei erau necesare $8 : 2 = 4$ zile. Terminînd aratul cu o zi mai devreme, brigada a arat-o, în numai $4 - 1 = 3$ zile. Mărirea productivității, prin aratul cu 6 ha pe zi mai mult, a făcut ca în cele trei zile să se are cu $6 \cdot 3 = 18$ ha mai mult decît fusese prevăzut, adică ceea ce trebuia să se are în ziua a patra.

Rezultă deci că aria tarlalei este de $18 \cdot 8 = 144$ ha. La început s-a arat cîte 18 ha pe zi, iar apoi cîte $18 + 6 = 24$ ha pe zi.

1.36. Dacă din costul cărții, care este cît 8 caiete și încă 75 bani, se scade prețul unui caiet, rămîne costul a 7 caiete și încă 75 bani, adică 16,50 lei. Deci costul

Scanned with OKEN Scanner

a 7 caiete este 16,50 — 0,75 = 15,75 lei, iar costul unui singur caiet 15,75 : 7 = = 2,25 lei. Costul cărții este 16,50 + 2,25 = 18,75 lei. Costul a 3 cărți și 7 caiete împreună va fi:

$$3 \cdot 18{,}75 + 7 \cdot 2{,}25 = 56{,}25 + 15{,}75 = 72 \text{ lei.}$$

1.37. Presupunem că toate bancnotele ar fi fost a cîte 25 lei, atunci s-ar fi plătit 25 · 182 = 4 550 lei, adică cu 4 550 — 1 800 = 2 750 lei mai mult. Această diferență se datorește faptului că au fost și bancnote a 3 lei, a căror valoare este cu 25 — 3 = 22 lei mai mică. Rezultă că numărul bancnotelor de 3 lei este: 2 750 : : 22 = 125, iar cel al bancnotelor de 25 lei este: 182 — 125 = 57.

Verificare: 3 · 125 + 25 · 57 = 375 + 1425 = 1800; 125 + 57 = 182.

1.38. De pe 80 ha s-a recoltat cîte 30 q, iar de pe 20 ha cîte 20 q.

1.39. Partea lui *A* este de 16 lei, iar cea a lui *B* de 8 lei.

1.40. S-au vîndut 470 de bilete a 4 lei.

1.41. Sînt 18 vagoane cu cîte 2 osii și 12 vagoane cu cîte 4 osii.

1.42. Dacă toate caietele vîndute ar fi fost de cîte 0,50 lei bucata, atunci s-ar fi încasat în total 0,50 · 64 = 32 lei, adică cu 46 — 32 = 14 lei mai puțin. Diferența provine de la caietele de 0,90 lei, care sînt cu cîte 0,90 — 0,50 = 0,40 lei mai scumpe.

S-au vîndut 14 : 0,40 = 35 caiete a 0,90 lei și 64 — 35 = 29 caiete a 0,50 lei.

1.43. S-au cumpărat 16 caiete a 2,25 lei și 124 caiete a 1 leu.

1.44. 20 de cărți a cîte 2 lei și 12 cărți a cîte 5 lei.

1.45. Sînt 2 robinete cu debitul de 230 l/oră și 5 robinete cu debitul de 300 l/oră.

1.46. 13 grinzi de brad și 17 grinzi de stejar.

1.47. 36 de vagoane au cîte 2 osii și 24 de vagoane au cîte 4 osii.

1.48. Presupunem că s-ar fi cumpărat același număr de meri și pruni, la prețul mediu de (5 + 3) : 2 = 4 lei bucata, atunci numărul lor total ar fi fost de aproximativ:

$$1\,265 : 4 \cong 316 \text{ (cîte 158 de fiecare fel).}$$

Pentru 158 de meri și 158 de pruni s-ar fi plătit: 5 · 158 + 3 · 158 = 790 + + 474 = 1 264 lei (cu un leu mai puțin).

Cum numărul merilor trebuie să fie mai mare decît cel al prunilor, iar costul lor total cu 1 leu mai mult decît în cazul ipotezei noastre, rezultă că mărind cu 2 numărul merilor și micșorînd cu 3 pe cel al prunilor, costul lor se va mări cu 1 leu: (5 · 2 — 3 · 3 = 1).

S-au cumpărat deci 160 de meri și 155 de pruni.

Verificare: 5 · 160 + 3 · 155 = 800 + 465 = 1 265 lei.

Scanned with OKEN Scanner

1.49. Dacă fineaţa ar fi cu 200 ha mai mare, atunci întreaga suprafaţă a gospodăriei ar fi de 920 + 200 = 1 120 ha, iar pămîntul arabil şi fineaţa ar fi de cîte 3 ori mai mare decît păşunea, care ar fi astfel a şaptea parte din întreaga suprafaţă. Rezultă deci că păşunea are 1 120 : 7 = 160 ha, pămîntul arabil 160 · 3 = = 480 ha, iar fineaţa 480 — 200 = 280 ha.

Verificare: 480 + 280 + 160 = 920.

1.50. Dacă cu 2 bancnote s-au cumpărat 3 m de pînză şi s-au primit 8 lei rest, cu 4 bancnote s-ar fi cumpărat 6 m de pînză şi s-ar fi primit 16 lei rest. A doua oară însă cu 4 bancnote şi încă 12 lei s-au cumpărat 8 m de pînză. Rezultă că 8 — 6 = 2 m de pînză costă 16 + 12 = 28 lei. Un singur metru de pînză costă 28 : 2 = 14 lei, iar valoarea bancnotei este de (14 · 3 + 8) : 2 = 25 lei.

1.51. Dacă toate tractoarele ar fi fost din brigada a doua, s-ar fi arat 5 · 8 · 18 = = 720 ha. În realitate s-au arat cu 720 — 656 = 64 ha mai puţin în cele 8 zile, deoarece tractoarele din prima brigadă ară cu cîte 1 ha pe zi mai puţin. Deci, în brigada întîi, au fost 64 : 8 = 8 tractoare. Prima brigadă a arat 8 · 4 · 8 = 256 ha, iar a doua 10 · 5 · 8 = 400 ha.

1.52. Dacă pentru 3 cărţi şi 2 caiete se plătesc 17,95 lei, pentru 5 · 3 = 15 cărţi şi 5 · 2 = 10 caiete se vor plăti 5 · 17,95 = 89,75 lei. Ştiind că 8 cărţi şi 10 caiete au costat 53 lei, rezultă că 15 — 8 = 7 cărţi costă 89,75 — 53 = 36,75 lei, iar o singură carte costă 36,75 : 7 = 5,25 lei.

Costul a 8 cărţi fiind de 5,25 · 8 = 42 lei, rezultă că 10 caiete vor costa 53 — — 42 lei = 11 lei, iar un singur caiet 11 : 10 = 1,10 lei.

1.53. Cele 3 cărţi fac cît 9 caiete şi 6 lei. 2 caiete şi 3 cărţi fac deci 11 caiete şi 6 lei, care fac astfel 17 lei. Deci 11 caiete fac 17 — 6 = 11 lei. Adică 1 leu caietul şi 3 + 2 = 5 lei cartea.

1.54. Dacă, prin dublarea sumei necesare pentru construirea căminului cultural nu s-ar mai putea construi podul şi ar mai trebui încă 50 000 lei, rezultă că suma alocată iniţial pentru construcţia căminului cultural este cu 50 000 lei mai mare decît cea alocată iniţial pentru construcţia podului.

Dacă, pentru dublarea sumei alocate pentru construcţia podului (luînd aceasta din suma alocată căminului cultural) va rămîne pentru căminul cultural 50 000 lei, ceea ce reprezintă cu 10 000 lei mai puţin decît dublul alocaţiei pentru pod, rezultă că dublul alocaţiei pentru pod este 50 000 + 10 000 = 60 000 lei.

Rezultă că suma alocată iniţial pentru construcţia podului este 60 000 : 2 = = 30 000 lei, iar cea alocată construcţiei căminului cultural 30 000 + 50 000 = = 80 000 lei.

1.55. În prima şi a treia bibliotecă sînt împreună de 3 ori şi jumătate mai multe cărţi decît în a doua. În toate bibliotecile sînt împreună de 4 ori şi jumătate mai multe cărţi decît în a doua.

Scanned with OKEN Scanner

In a doua bibliotecă sînt deci $6\,309 : 4{,}5 = 1\,402$ cărţi, în prima sînt $1\,402 \cdot 3 + 1 = 4\,207$ cărţi, iar în a treia $1\,402 : 2 - 1 = 700$ cărţi.

Verificare: $4\,207 + 1\,402 + 700 = 6\,309$.

1.56. Dacă în magazia a doua ar fi fost cu 5,4 t mai mult (adică tot cît în prima), în total ar fi fost $205{,}37 + 5{,}4 = 210{,}77$ t grîu şi ar fi reprezentat de $3 + 3 + 1 = 7$ ori cantitatea de grîu din magazia a treia.

În magazia a treia sînt deci: $210{,}77 : 7 = 30{,}11$ tone de grîu, iar în primele două $30{,}11 \cdot 3 = 90{,}33$ tone şi respectiv $90{,}33 - 5{,}4 = 84{,}93$ tone.

Verificare: $90{,}33 + 84{,}93 + 30{,}11 = 205{,}37$.

1.57. Prima şi cea de-a treia tarlală echivalează împreună, ca suprafaţă, cu de 4 ori tarlaua a treia.

Producţia medie pe aceste două tarlale este de:

$$(32 \cdot 3 + 50) : 4 = 36{,}5 \text{ q}.$$

Dacă de pe întreaga suprafaţă s-ar fi recoltat cîte 41 q la ha, cît s-a recoltat de pe tarlaua a doua, atunci s-ar fi realizat în total:

$$41 \cdot 120 = 4\,920 \text{ q},$$

deci cu

$$4\,920 - 4\,560 = 360 \text{ q mai mult}.$$

Aceasta datorită faptului că de pe prima şi a treia (luate împreună) s-a realizat în medie cu $41 - 36{,}5 = 4{,}5$ q la ha mai puţin.

Rezultă că prima şi a treia tarla au împreună $360 : 4{,}5 = 80$ ha.

Aria tarlalei a treia este de $80 : 4 = 20$ ha, cea a primei tarlale 60 ha şi cea a tarlalei a doua de 40 ha.

1.58. Cei 12 m de stofă valorează cît $12 \cdot 4 = 48$ m de şifon. Atunci, suma de 2 400 lei poate reprezenta valoarea a 20 m de stambă şi $24 + 48 = 72$ m de şifon.

Dacă 10 m de stambă şi 22 m de şifon valorează 780 lei, atunci $10 \cdot 2 = 20$ m de stambă şi $22 \cdot 2 = 44$ m de şifon vor valora $780 \cdot 2 = 1\,560$ lei.

Cum 20 m de stambă şi 72 m de şifon valorează 2 400 lei, rezultă că $72 - 44 = 28$ m de şifon valorează $2\,400 - 1\,560 = 840$ lei, iar un singur metru $840 : 28 = 30$ lei.

Un metru de stofă costă $30 \cdot 4 = 120$ lei, iar un metru de stambă $(780 - 30 \cdot 22) : 10 = 12$ lei.

1.59. Scăzînd din suma celor trei vîrste diferenţa dintre vîrsta mamei şi vîrsta fiului se obţine suma dintre vîrsta tatălui şi de două ori vîrsta fiului sau de $3 + 2 = 5$ ori vîrsta fiului $110 - 25 = 85$ ani.

Vîrsta fiului este $85 : 5 = 17$ ani, vîrsta mamei $17 + 25 = 42$ ani, iar vîrsta tatălui $17 \cdot 3 = 51$ ani.

Verificare: $51 + 42 + 17 = 110$.

Scanned with OKEN Scanner

1.60. Suma celui de al doilea pionier adunată cu dublul sumei celui de al treilea este $84 - 45 = 39$ lei. Suma celui de al treilea, adunată cu dublul sumei celui de al doilea este de $(84 + 3) - 45 = 42$ lei.

De 3 ori sumele ultimilor doi dau $39 + 42 = 81$ lei. Rezultă că ultimii doi au împreună $81 : 3 = 27$ lei.

Primul pionier are $45 - 27 = 18$ lei, al doilea $42 - 27 = 15$ lei, iar al treilea $39 - 27 = 12$ lei.

Verificare: $18 + 15 + 12 = 45$; $18 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 12 = 84$; $18 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 12 = 84 + 3$.

1.61. Motocicleta este mai scumpă decît bicicleta cu $4\,950 + 3\,720 = 8\,670$ lei.

Toate trei împreună costă cu $8\,670 + 3\,720 = 12\,390$ lei mai mult decît costul a trei biciclete. Rezultă că trei biciclete costă $14\,880 - 12\,390 = 2\,490$ lei, iar una singură $2\,490 : 3 = 830$ lei. Motoreta costă $830 + 3\,720 = 4\,550$ lei, iar motocicleta $830 + 8\,670 = 9\,500$ lei.

1.62. 27 m, 39 m, 23 m.

1.63. În a doua variantă, prima echipă lucrează cu 3 zile mai mult, iar a doua echipă cu 4 zile mai puţin. Rezultă deci că cea ce realizează prima echipă în 3 zile, a doua echipă realizează abia în 4 zile.

Ceea ce realizează prima echipă în $6 \cdot 3 = 18$ zile, va realiza a doua echipă în $6 \cdot 4 = 24$ zile. Dacă întreaga recoltare se realizează de prima echipă în 18 zile şi de a doua în 16 zile, rezultă că această recoltare s-ar putea realiza numai de către a doua echipă în $24 + 16 = 40$ zile, iar numai de către prima echipă în $18 + (16 : 4) \cdot 3 = 18 + 4 \cdot 3 = 18 + 12 = 30$ zile.

1.64. Dacă toate problemele ar fi fost bine rezolvate, elevul ar fi primit $5 \cdot 10 = 50$ de puncte. El a primit însă cu $50 - 26 = 24$ de puncte mai puţin, datorită problemelor rezolvate greşit. Diferenţa între numărul de puncte pentru o problemă bine rezolvată şi pentru una greşit rezolvată este de $5 + 3 = 8$ puncte. Rezultă că au fost greşit rezolvate $24 : 8 = 3$ probleme, iar bine rezolvate $10 - 3 = 7$ probleme.

1.65. Deoarece numărul trăsurilor existente în prezent este cu unu mai mare decît numărul autobuzelor existente în trecut, rezultă că în prezent numărul autobuzelor este de 8 ori plus 8 mai mare decît numărul autobuzelor din trecut.

Dar în problemă se dă că numărul autobuzelor existente este cu 8 mai mare decît numărul autobuzelor existente în trecut, deci rezultă că în trecut nu era nici un autobuz, iar în prezent sînt 8. Numărul trăsurilor în trecut era 8, iar în prezent este doar o trăsură.

1.66. Diferenţa dintre vîrsta tatălui şi cea a fiului rămîne mereu aceeaşi (39 ani). Cînd tatăl va avea de 4 ori vîrsta fiului, atunci diferenţa dintre vîrstele lor va fi de 3 ori mai mare decît vîrsta fiului. Fiul va avea deci $39 \text{ ani} : 3 = 13$ ani. În prezent fiul are: $13 \text{ ani} - 7 \text{ ani} = 6$ ani, iar tatăl $6 \text{ ani} + 39 \text{ ani} = 45$ ani.

Scanned with OKEN Scanner

1.67. Al treilea lăsînd 48 nuci, a luat partea sa de $48 : 2 = 24$ nuci. Deci al doilea a lăsat $48 + 24$ nuci $= 72$ nuci şi a luat $72 : 2 = 36$ nuci. Deci primul a lăsat $72 + 36 = 108$ nuci şi a luat $108 : 2 = 54$ nuci. Deci, iniţial au fost $108 + 54 = 162$ nuci.

1.68. După ce am dublat suma a treia oară, aveam $0 + 20 = 20$ lei, iar înainte de a o dubla $20 : 2 = 10$ lei.

După dublarea sumei, pentru a doua oară, aveam $10 + 20 = 30$ lei, iar înainte de a o dubla $30 : 2 = 15$ lei.

După dublarea sumei iniţiale, aveam $15 + 20 = 35$ lei, iar înainte de a o dubla $35 : 2 = 17{,}50$ lei.

Verificare: $17{,}50 \cdot 2 = 35$, $35 - 20 = 15$, $15 \cdot 2 = 30$, $30 - 20 = 10$, $10 \cdot 2 = 20$, $20 - 20 = 0$.

1.70. Scriem toate numerele în baza 10:

$$(2 \cdot 6^2 + 5) + (4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3) = 3 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 3.$$

După efectuarea operaţiilor indicate de semne se găseşte: $185 = 185$.

1.73. Pe baza proprietăţilor operaţiilor, efectuînd în ordine inversă operaţiile, obţinem:

$$x = [(800 : 40 + 9\,980) \cdot 15 : 7\,500 : 20 + 24] \cdot 40 =$$
$$= [(20 + 9\,980) \cdot 15 : 7\,500 : 20 + 24] \cdot 40 = (10\,000 \cdot 15 : 7\,500 : 20 + 24) \cdot 40 =$$
$$= (1 + 24) \cdot 40 = 25 \cdot 40 = 1\,000.$$

1.74. $x = [(800 \cdot 40 + 192\,000) : 4\,000 \cdot 15 + 20] \cdot 32$; $x = 27\,520$.

1.75. $[(3x + 2) \cdot 5 - 4] : 7 = 18$. Se găseşte $x = 8$.

Capitolul II

2.1. Se observă că $91 = 7 \cdot 13$. Deoarece 7 şi 13 sînt numere prime, ele sînt singura pereche de factori în care se descompune numărul 91.

Numărul de camere fiind mai mare decît 10, rezultă că acesta este 13, iar preţul unei camere 7 lei. Costul unei mingi este $7 \cdot 9 = 63$ lei.

2.2. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Un număr este divizibil prin 30 dacă este în acelaşi timp multiplu de 2, de 3 şi de 5. Numărul N este multiplu de 2, fiindcă suma cifrei unităţilor este un număr par ($3 + 7 + 8 + 4 + 4 + 4 = 30$). Este multiplu de 3, fiindcă suma cifrelor tuturor numerelor, luate ca simple unităţi, este multiplu de 3. Avem ($8 + 14 + 14 + 26 + 16 + 12 = 90$). Este şi multiplu de 5, fiindcă suma cifrelor unităţilor este un număr la care cifra unităţilor se termină cu 0 (zero).

Scanned with OKEN Scanner

2.3. Dacă numărul este divizibil prin 9, atunci şi suma cifrelor sale este divizibilă prin 9 (şi reciproc), iar orice multiplu al sumei cifrelor sale va fi tot un multiplu de 9. Evident, suma dintre numărul, care este multiplu de 9 şi un multiplu al sumei cifrelor sale, care este, de asemenea, multiplu de 9, va fi un multiplu de 9.

Dacă numărul nu este divizibil prin 9, atunci nici suma cifrelor sale (s) nu va fi divizibilă prin 9, dar adunînd numărului, de 8 ori suma cifrelor sale, se va obţine o sumă a cifrelor, care este multiplu de 9, deci şi numărul obţinut va fi multiplu de 9.

Exemplu: Fie $\overline{ab}$ un număr oarecare de două cifre, care mai poate fi scris $10a + b$. Adunîndu-i de 8 ori suma cifrelor sale obţinem:

$$10a + b + 8(a + b) = 10a + b + 8a + 8b = 18a + 9b = 9(2a + b).$$

După cum se observă, oricare ar fi cifrele a şi b suma $18a + 9b = 9(2a + b)$ este un multiplu de 9.

2.4. $252 = 2^2 \cdot 7 \cdot 3^2$. Produsul fiind de 3 factori de cîte o cifră, factorii nu pot fi decît $4 \cdot 7 \cdot 9$ sau $6 \cdot 7 \cdot 6$. Numărul fiind prim, cifra unităţilor nu poate fi cu soţ, fiindcă s-ar divide cu 2. Deci numărul poate fi printre numerele 497, 479, 947, 749, 667.

Dintre acestea, 497 şi 749 se divid cu 7, iar 667 se divide cu 23.
Răspuns: 479 şi 947.

2.5. $1\,971 = 3^3 \cdot 73$. Un pătrat trebuie să aibă factori primi la exponenţi cu soţ. Deci pe 1 971 trebuie să-l înmulţim tot cu $3 \cdot 73 = 219$.

2.6. Pentru a se obţine un număr cît mai mic de bucăţi cubice de săpun, muchia cubului trebuie să fie cît mai mare posibil. Mărimea muchiei este c.m.m.d.c. al dimensiunilor paralelipipedului. Avem:

$100 = 2^2 \cdot 5^2$; $80 = 2^4 \cdot 5$; $50 = 2 \cdot 5^2$ (c.m.m.d.c. $= 2 \cdot 5 = 10$).

Cuburile vor avea muchia de 10 cm.

Numărul bucăţilor de săpun este $10 \cdot 8 \cdot 5 = 400$.

2.7. Fiecare roată face atîtea rotaţii de cîte ori se cuprinde numărul dinţilor ei în c.m.m.m.c. al numerelor 1965 şi 262. *Răspuns*: Roata mare face 2 rotaţii şi cea mică 15.

2.8. Numerele care se divid prin 3, 4, 5 deodată sînt multipli de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Numerele căutate, trebuind să dea restul 2, sînt multipli de 60, plus 2, adică sînt, $1 \cdot 60 + 2$, $2 \cdot 60 + 2$, $3 \cdot 60 + 2$, sau 62, 122 şi 182. Ne oprim aici, deoarece $60 \cdot 4 + 2 = 242$ depăşeşte numărul 200.

2.9. C.m.m.m.c. al lui 3, 4, 5, 8 şi 9 este $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Numărul căutat este $360 + 1 = 361$.

2.10. $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 = 422$.

Scanned with OKEN Scanner

2.11. Numărul căutat minus 4 se divide cu 5, 7 şi 8 deci $N = 5 \cdot 7 \cdot 8 + 4 = 284$.

2.12. $N = 2^4 \cdot 3^2 + 4 = 148$.

2.13. Numărul de ore după care cele trei vapoare vor pleca din nou la aceeaşi oră este cel mai mic multiplu comun al numerelor 120, 126, 216.

$$120 + 2^3 \cdot 5 \cdot 3,\ 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7,\ 216 = 2^3 \cdot 3^3.$$

Răspuns: $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7\,560$ ore $= 315$ zile.

2.14. *a*) Pentru a lucra cu numere întregi transformăm dimensiunile date în milimetri şi obţinem 18 mm, 25 mm şi 20 mm. C.m.m.c. al acestor numere este: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$ mm $= 90$ cm, care este dimensiunea cerută.

b) Numărul cărţilor ce ar încape în raftul astfel construit este:

$900 : 18 = 50$ de cărţi cu grosimea de 1,8 cm,

$900 : 25 = 36$ de cărţi cu grosimea de 2,5 cm şi

$900 : 20 = 45$ de cărţi groase de cîte 2 cm.

2.15. Primul parcurge traseul în 75 minute, al doilea în 90 minute şi al treilea în 112 minute. Adăugînd timpul de staţionare în piaţă, primul porneşte după 80 minute, al doilea după 96 minute şi al treilea după 120 minute. C.m.m.m.c. al lui 80, 96, 120 este $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$. După 480 minute $= 8$ ore, toate sînt gata din nou de plecare, deci la ora $6 + 8 =$ ora 14.

2.16. Numărul pionierilor este un multiplu comun de 6, 7 şi 8 plus 5. Cel m.m.m.c. al numerelor 6, 7, 8 este 168, iar următorii multiplii 336, 504, 672, ... Multiplii comuni ai lui 6, 7 şi 8 plus 5 sînt: 173, 341, 509, 677, ... Dintre aceştia, numai 173 îndeplineşte condiţia de a fi mai mic ca 200. Şcoala are deci 173 pionieri.

2.17. Căutăm divizorii comuni mai mari decît resturile 8 şi 7 ai numerelor:

$$4\,373 - 8 = 4\,365 \text{ şi } 826 - 7 = 819.$$

$$4\,365 = 3^2 \cdot 5 \cdot 97 \text{ şi } 819 = 3^2 \cdot 91.$$

Rezultă că $x = 3^2 = 9$.

Verificare: $4\,373 = 9 \cdot 485 + 8$ şi $826 = 9 \cdot 91 + 7$.

2.18. 269.

2.19. Un număr care împărţit cu 16 dă restul 4 este de forma $16k + 4 = 4(4k + 1)$, adică un multiplu de 4, deci un număr par (de exemplu 20, 36, 52, 68, ...).

Un număr care împărţit cu 20 dă restul 5 este de forma $20k + 5 = 5(4k + 1)$, adică un multiplu de 5, cu ultima cifră 5, deci un număr impar (de exemplu 25, 45, 65, 85, ...).

Rezultă că un număr care ar îndeplini ambele condiţii ar trebui să fie în acelaşi timp şi par şi impar, ceea ce este imposibil.

Scanned with OKEN Scanner

2.20. $4\,851\,000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$; $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Factorii 2, 3, 5, 7 trebuie să figureze în fiecare număr, cel puţin la puterea întîi.

Fie A şi B cele două numere. Avem:

$$\begin{cases} A_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, \\ B_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 23\,100. \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420, \\ B_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 11\,550. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1\,050, \\ B_3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 4\,620. \end{cases} \quad \begin{cases} A_4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2\,100, \\ B_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2\,310. \end{cases}$$

Problema admite deci patru soluţii.

2.21. Problema admite patru soluţii:

$$\begin{cases} A_1 = 3 \cdot 5 = 15 \\ B_1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \\ B_2 = 3^2 \cdot 5^2 = 225 \end{cases} \quad \begin{cases} A_3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90 \\ B_3 = 3 \cdot 5^2 = 75 \end{cases} \quad \begin{cases} A_4 = 3^2 \cdot 5 = 45 \\ B_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150. \end{cases}$$

2.22. $54 = 2 \cdot 3^3$; $0{,}8 = \frac{4}{5} = \frac{2^2}{5}$.

Fiecare număr se divide prin $2 \cdot 3^3$.

Cîtul lor fiind $\frac{A}{B} = \frac{2^2}{5}$, înseamnă că A mai conţine ca factor încă pe 2^2, iar B pe 5. Deci $A = 2 \cdot 3^3 \cdot 2^2 = 216$, iar $B = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$.

2.23. 48 şi 72.

2.24. Deoarece raportul celor două numere este $\frac{6}{11}$ şi c.m.m.m.c. al lor este $1\,386 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, primul conţine ca factor pe $(2 \cdot 3)$, iar al doilea pe 11, ceilalţi divizori sînt comuni: $3 \cdot 7 = 21$.

Rezultă că cele două numere căutate sînt $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$ şi $11 \cdot 3 \cdot 7 = 231$.

2.25. $40 = 2^3 \cdot 5$; $3\,600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Unul dintre numere conţine ca factori pe 2^3, iar celălalt pe 2^4; unul îl conţine pe 3^2, iar celălalt nu-l conţine pe 3 ca factor; unul îl conţine ca factor pe 5, iar celălalt pe 5^2. Există următoarele cazuri:

$$\begin{cases} A_1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360, \\ B_1 = 2^4 \cdot 5^2 = 400. \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1\,800, \\ B_2 = 2^4 \cdot 5 = 80. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = 2^3 \cdot 5 = 40, \\ B_3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3\,600. \end{cases} \quad \begin{cases} A_4 = 2^3 \cdot 5^2 = 200, \\ B_4 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720. \end{cases}$$

2.26. Numărul se scrie:

$$N = 1\,000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b = 101(10a + b).$$

Trebuie ca $10a + b$ să fie prim şi cît mai mare. Cel mai mare număr prim de două cifre este 97. Numărul căutat este 9 797.

2.27. $124\overline{ab} = 12\,400 + \overline{ab} = 18 \cdot 688 + 16 + \overline{ab} \stackrel{\mathfrak{M}}{=} 18$, deci ab trebuie căutat printre numerele $16 + \overline{ab}$ care sînt multipli de 18, adică 18, 36, 54,

Scanned with OKEN Scanner

72, 90, iar ab devine 2, 20, 38, 56, 74, însă $\overline{ab}$ fiind format din cifre consecutive, convine numai 56. Deci numărul căutat este $12\,456 = 18 \cdot 692$.

Soluția a II-a. Pentru a se divide cu 18 trebuie să se dividă cu 2 și cu 9, adică b să fie cifră cu soț, iar suma cifrelor numărului: $1 + 2 + 4 + a + b \stackrel{\mathfrak{M}}{=} 9$. Deci $a + b = 2$, $a + b = 11$.

Ținînd seama de faptul că a și b sînt cifre consecutive, avem: $a = 5$ și $b = 6$. Deci numărul este 12 456.

Capitolul III

3.1. Partea pentru vii și grădini este de $1\,800 \frac{1}{3} = 600$ ha, cea pentru grîu de $1800 \cdot \frac{1}{4} = 450$ ha, cea pentru orz $1\,800 \frac{1}{5} = 360$ ha, cea pentru porumb $1\,800 \cdot \frac{1}{6} = 300$ ha.

Pentru nutreț rămîn:

$$1\,800 - 600 - 450 - 360 - 300 = 90 \text{ ha.}$$

3.2. Viteza de tăiere crește de $\frac{6}{4} = 1{,}5$ ori, deci și numărul de piese într-o oră va fi de 1,5 ori mai mare. $8 \cdot 1{,}5 = 12$ piese.

3.3. Rezultă că 4/5 din masa săculețului echivalează cu 4/5 kg. Deci un săculeț conține 1 kg făină.

3.4. Dacă jumătatea primului număr este pătrimea celui de-al treilea înseamnă că al treilea este dublul primului. Cum al treilea este mai mare decît primul cu 6,4, rezultă că primul este 6,4. Jumătatea primului este deci $6{,}4 : 2 = 3{,}2$, iar aceasta fiind treimea celui de-al doilea, rezultă că al doilea este $3{,}2 \cdot 3 = 9{,}6$.

Al treilea fiind dublul primului este $6{,}4 \cdot 2 = 12{,}8$. Numerele sînt: 6,4; 9,6; 12,8.

Verificare: $\frac{6{,}4}{2} = \frac{9{,}6}{3} = \frac{12{,}8}{4} = 3{,}2$.

$$12{,}8 - 6{,}4 = 6{,}4$$

3.5. O săptămînă are $24 \cdot 7 = 168$ ore.

Într-o oră ceasornicul întîrzie cu $\frac{105}{9} = 11 \frac{2}{3}$ s, iar într-o săptămînă va întîrzia cu $11 \frac{2}{3} \cdot 168 = 35 \cdot 56 = 1\,960$ s $= 32$ min 40 s.

Scanned with OKEN Scanner

3.6. $2\frac{1}{2}$ m; 5 m; $6\frac{3}{5}$ m.

3.7. Numărul băieţilor prezentaţi la concurs este: $\frac{145-65}{2}=\frac{80}{2}=40$, iar cel al fetelor $145-40=105$. Numărul candidaţilor reuşiţi este de $105\cdot\frac{20}{21}=100$. Dacă numărul băieţilor reuşiţi se raportă la cel al fetelor reuşite ca 7 la 13, rezultă că din 20 de candidaţi reuşiţi 7 sînt băieţi şi 13 sînt fete, iar din totalul de 100, 35 sînt băieţi şi 65 sînt fete.

3.8. Debitul robinetului cu apă rece este de $15:2=7\frac{1}{2}$ dm³/min, iar cel al robinetului cu apă caldă de $40:7=5\frac{5}{7}$ dm³/min.

Într-un minut cele două robinete umplu împreună $7\frac{1}{2}+5\frac{5}{7}=13\frac{3}{14}$ dm³.

Baia va fi umplută în $370:13\frac{3}{14}=28$ min.

În acest timp vor curge $7\frac{1}{2}\cdot 28=210$ dm³ apă rece şi $370-210=160$ dm³ apă caldă.

3.9. Cele trei dimensiuni ale hambarului, în decimetri, sînt: lungimea 5,4 m = = 54 dm; lăţimea $54\cdot\frac{2}{3}=36$ dm, înălţimea $36-14=22$ dm.

Volumul $V=54\cdot 36\cdot 22=42\,768$ dm³.

În hambar se găseşte $42\,768\cdot\frac{25}{27}=39\,600$ dm³ grîu.

Transformăm în hl: $39\,600$ dm³ $=396$ hl.

Masa grîului este $80\cdot 396=31\,680$ kg.

3.10. Suprafaţa repartizată pentru cartofi, fasole şi ceapă reprezintă $0{,}32+0{,}28+\frac{2}{7}=0{,}6+\frac{2}{7}=\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{31}{35}$ din întreaga suprafaţă.

Pentru flori rămîne $1-\frac{31}{35}=\frac{4}{35}$ din întreaga suprafaţă.

Pentru fasole şi flori s-a repartizat, la un loc $0{,}28+\frac{4}{35}=\frac{7}{25}+\frac{4}{35}=\frac{69}{175}$ din întreaga suprafaţă.

Suprafaţa întregii grădini este de $345:\frac{69}{175}=345\cdot\frac{175}{69}=875$ m².

Suprafeţele repartizate pe culturi sînt:

$875\cdot 0{,}32=280$ m² pentru cartofi; $875\cdot 0{,}28-245$ m² pentru fasole; $875\cdot\frac{2}{7}=250$ m² pentru ceapă şi $875\cdot\frac{4}{35}=100$ m² pentru flori.

Scanned with OKEN Scanner

3.11. La venirea celor 15 vaci, cooperativa dispunea de hrana necesară unui număr de 65 de vaci, pentru $90 - 25 = 65$ de zile, cîte 20 kg pe zi, adică $20 \cdot 65 \cdot 65$ kg fîn.

Cu acest fîn urmează să se hrănească $65 + 15 = 80$ de vaci, timp de 65 de zile, reducîndu-se astfel raţia de fîn a unui animal la $\frac{20 \cdot 65 \cdot 65}{80 \cdot 65} = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$ kg pe zi.

Diferenţa de $20 - 16\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$ kg fîn pentru fiecare animal va fi înlocuită cu $3\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ kg grăunţe pe zi.

3.12. Cînd din vagonet lipsesc $\frac{2}{7}$ din cantitatea de cărbuni, el cîntăreşte cu $3\,850 \cdot \frac{2}{11} = 700$ kg mai puţin. Rezultă că întreaga încărcătură a vagonetului este de $700 : \frac{2}{7} = 2\,450$ kg, iar vagonetul gol $3\,850 - 2\,450 = 1\,400$ kg.

3.13. În 3 ore şi 10 minute, tractorul parcurge distanţa de $4{,}8 \cdot 3\frac{1}{6} = \frac{24}{5} \cdot \frac{19}{6} = \frac{76}{5} = 15{,}2$ km.

Mărindu-şi viteza la 5,7 km/oră, aceeaşi distanţă o va parcurge în $\frac{76}{5} : \frac{57}{10} = \frac{76}{5} \cdot \frac{10}{57} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ ore (2 ore şi 40 de minute).

3.14. Vitezele celor două vapoare sînt:

$$37\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} = \frac{75}{2} \cdot \frac{4}{5} = 30 \text{ km/oră şi } 96\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{385}{4} \cdot \frac{2}{5} = 38\frac{1}{2} \text{ km/oră.}$$

a) După $\frac{4}{5}$ ore de la plecare, ele se vor găsi, faţă de mal, la distanţele de $30 \cdot \frac{4}{5} = 24$ km şi $38\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 30\frac{4}{5}$ km.

b) Depărtarea dintre ele, după $\frac{4}{5}$ ore de mers, este de $30\frac{4}{5} - 24 = 6\frac{4}{5}$ km.

3.15. *a)* Într-o oră, al doilea drumeţ se depărtează de primul cu $3\frac{3}{4} - 3\frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ km.

După 3 ore şi 12 minute, distanţa dintre ei va fi de $\frac{5}{8} \cdot 3\frac{1}{5} = 2$ km.

b) Al doilea drumeţ ajunge în oraşul *B* mai devreme cu: $27\frac{1}{2} : 3\frac{1}{8} - 27\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = \frac{55}{2} : \frac{25}{8} - \frac{55}{2} : \frac{15}{4} = 8\frac{4}{5} - 7\frac{1}{3} = 1\frac{7}{15}$ ore sau cu 1 h şi 28 min.

Scanned with OKEN Scanner

3.16. Viteza medie a trenurilor este:

$$8{,}2 \text{ m/s} = 8{,}2 \cdot \frac{3\,600}{1\,000} \text{ km/h} = 29\frac{13}{25} \text{ km/h}.$$

Distanţa Tulcea-Medgidia, parcursă în 10 h 37 min — 5 h 45 min = 4 h 52 min = $= 4\frac{13}{15}$ h este:

$$29\frac{13}{25} \cdot 4\frac{13}{15} = \frac{738}{25} \cdot \frac{73}{15} = \frac{17\,958}{125} \simeq 144 \text{ km}.$$

Distanţa Negru-Vodă-Medgidia este parcursă în: $64 : 29\frac{13}{25} = 64 \cdot \frac{25}{738} = \frac{800}{369} \cong 2$ h şi 10 min.

Trenul al doilea a plecat din Negru-Vodă la ora 10 h 37 min — 2 h 10 min = = 8 h 27 min.

3.17. Distanţa Bucureşti-Ploieşti trebuia să fie parcursă în 14 — 10 = 4 ore, mergînd cu o viteză medie de 60 : 4 = km/oră.

Bicicleta s-a defectat după 15 : 15 = 1 oră de mers, la o distanţă de 60 — 15 = = 45 km de Ploieşti.

După reparatul bicicletei, îi mai rămăsese ca timp de mers $4 - 1 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ ore. În acest timp, distanţa rămasă este parcursă cu viteza de $45 : 2\frac{1}{2} = 45 \cdot \frac{2}{5} =$ = 18 km/oră, adică cu 18 — 15 = 3 km/oră mai mult.

3.18. Se observă că la ora 8 şi 30 minute este la jumătatea timpului propus şi ar fi trebuit să se afle la jumătatea drumului.

Dar $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$ oră reprezintă cu cît a fost mai devreme la jumătatea drumului faţă de ora 8 şi 30 min.

$1\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$ km/h, viteza realizată,

$12 \cdot 2\frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{11}{4} = 33$ km, drumul parcurs,

33 : 3 = 11 km/oră viteza propusă.

3.19. Viteza biciclistului este mai mare decît cea a pietonului de:

$$3\frac{20}{60} : \frac{40}{60} = 5 \text{ ori}.$$

Distanţa parcursă de biciclist în 30 de minute, a fost parcursă de pieton în:

$30 \text{ min} \cdot 5 = 150 \text{ min} = 2\frac{1}{2}$ ore.

Rezultă că pietonul a plecat mai devreme cu: $2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$ ore.

Scanned with OKEN Scanner

3.20. Mărindu-şi viteza de la 3 km/oră la 4 km/oră, turistul va parcurge distanţa rămasă pînă la gară într-un timp mai scurt cu $40 + 45 = 85$ minute $= \frac{17}{12}$ ore.

Fiecare kilometru de drum va fi parcurs mai repede cu $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ore. Rezultă că pînă la gară mai sînt:

$$\frac{17}{12} : \frac{1}{12} = \frac{17}{12} \cdot 12 = 17 \text{ km}.$$

Distanţa din sat şi pînă la gară este de 3 km + 17 km = 20 km.

3.21. Lungimea pasului primului pieton este $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$ m, iar al celui de-al doilea $\frac{100}{120} = \frac{5}{6}$ m. În timp ce primul face $\frac{2}{3} \cdot 24 = 16$ m, al doilea face $\frac{5}{6} \cdot 20 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ m; deci cu $16\frac{2}{3} - 16 = \frac{2}{3}$ m mai mult. Dacă la 20 paşi, al doilea turist face numai cu $\frac{2}{3}$ m mai mult ca primul, al doilea va face în total $20 \cdot \left(240 : \frac{2}{3}\right) = 7\,200$ pînă la destinaţie. Cei 7 200 paşi ai lui fac $\frac{5}{6} \cdot 7\,200 = 6\,000$ m.

Primul pieton parcurge $6\,000 - 240 = 5\,760$ m, iar al doilea 6 000 m.

3.22. Jumătate din distanţa care i-a mai rămas de parcurs este $2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ km, iar întreaga distanţă rămasă $3\frac{1}{2} \cdot 2 = 7$ km.

Jumătate din distanţa de la A la B este $7 + 1\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$ km, iar întreaga distanţă $8\frac{1}{2}\ 2 = 17$ km.

Exprimăm timpul de mers în ore: 35 min 25 s $= 35\frac{5}{12}$ min $= \frac{35\frac{5}{12}}{60}$ h $= \frac{85}{144}$ h.

Viteza biciclistului este: $v = \frac{17}{\frac{85}{144}} = 17 \cdot \frac{144}{85} = 28\frac{4}{5}$ km/oră.

3.23. Considerînd preţul unui metru de stambă egal cu o parte, preţul unui metru de pînză este egal cu 2 părţi, iar cel al unui metru de satin cu 2: $\frac{6}{5} = \frac{5}{3}$ părţi. 40 m de satin valorează cît $40 \cdot \frac{5}{3} = 66\frac{2}{3}$ m de stambă, iar 25 m de pînză cît $25 \cdot 2 = 50$ m de stambă.

În total, valoarea materialelor vîndute, echivalează cu valoarea a $32 + 66\frac{2}{3} + 50 = 148\frac{2}{3}$ m de stambă.

Scanned with OKEN Scanner

Prețul unui metru de stambă este $1\,784 : 148\frac{2}{3} = 1\,784\ \frac{3}{446} = 12$ lei, cel al unui metru de satin $12 \cdot \frac{5}{3} = 20$ lei, iar cel al unui metru de pînză $12 \cdot 2 = 24$ lei.

3.24. Suma de 43 lei reprezintă $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ din cît a scos prima dată. Rezultă că prima dată a scos $43 : \frac{2}{5} = 43 \cdot \frac{5}{2} = \frac{215}{2} = 107{,}50$ lei. A doua oară a scos $107{,}50 - 43 = 64{,}50$ lei.

În total, a scos de la C.E.C. suma de $107{,}50 + 64{,}50 = 172$ lei.

3.25. Numărul bărbaților din echipă a crescut cu: $44 - 34 = 10$. La început numărul bărbaților din echipă era de $10 : \frac{1}{3} = 10 \cdot 3 = 30$. Numărul total al membrilor echipei a crescut la $30 \cdot 4 = 120$, din care femei sînt: $120 - (30 + 10) = 80$. La început numărul femeilor era de $80 - 34 = 46$.

Echipa a avut deci la început 30 de bărbați și 46 femei.

3.26. Dacă toate bîrnele ar fi fost de brad, ele ar fi cîntărit $27\frac{4}{5} \cdot 10 = 278$ kg, deci cu $384\frac{1}{5} - 278 = 106\frac{1}{5}$ kg mai puțin. Diferența provine de la bîrnele de stejar, care sînt mai grele cu cîte $45\frac{1}{2} - 27\frac{4}{5} = 17\frac{7}{10}$ kg bucata. Rezultă că au fost $106\frac{1}{5} : 17\frac{7}{10} = 6$ bîrne de stejar.

3.27. Deducem că: partea semănată cu porumb reprezintă $\frac{2}{7} : \frac{2}{3} = \frac{3}{7}$ din cea semănată cu grîu; cea semănată cu orz $\frac{2}{7} : \frac{4}{5} = \frac{5}{14}$ din cea cu grîu; cea cu cartofi $\frac{2}{7} : \frac{3}{8} = \frac{16}{21}$ din cea cu grîu. Cu porumb și orz s-a semănat o suprafață care reprezintă $\frac{3}{7} + \frac{5}{14} = \frac{11}{14}$ din cea semănată cu grîu. Deci $1 - \frac{11}{14} = \frac{3}{14}$ reprezintă 90 ha, iar întreaga suprafață semănată cu grîu este de $90 : \frac{3}{14} = 420$ ha. Găsim ușor că s-a semănat cu porumb 180 ha, cu orz 150 ha, cu cartofi 320 ha.

3.28. După ce s-a împrumutat $\frac{1}{5}$ din cărți, în bibliotecă mai rămăsese $\frac{4}{5}$ din cărți. S-au mai primit ulterior $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ din cîte cărți erau la început, biblioteca avînd înregistrate, în total, $1\frac{2}{15}$ din cîte avusese inițial.

Înainte de a mai împrumuta încă 100 de cărți, biblioteca mai rămăsese cu $1\frac{2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{14}{15}$ din cîte cărți avusese la început. După ce a împrumutat și cele 100 de

Scanned with OKEN Scanner

cărți, a mai rămas cu $1\frac{2}{15} \cdot \frac{13}{17} = \frac{17}{15} \cdot \frac{13}{17} = \frac{13}{15}$ din cîte avusese inițial. Rezultă că cele 100 de cărți reprezintă $\frac{14}{15} - \frac{13}{15} = \frac{1}{15}$ din cîte cărți au fost la început.

La început, în bibliotecă au fost $100 : \frac{1}{15} = 100 \cdot 15 = 1\,500$ de cărți.

Totalul cărților înregistrate în bibliotecă este de $1\,500 \cdot 1\frac{1}{15} = 1\,500\frac{17}{15} = 1\,700$ de cărți.

3.29. Viteza bărcii cînd merge în sensul curentului de apă este de $3 + 1 = 4$ km/oră, iar împotriva lui de $3 - 1 = 2$ km/oră.

Pierderea scîndurii s-a produs după $\frac{1}{2}$ ore de la plecarea din A, cînd barca se găsea la $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ km de A.

Pescarul sesizează pierderea scîndurii după $10 - 8\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ ore, cînd scîndura rămăsese cu $3 \cdot 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ km în urmă.

Întorcîndu-se după scîndură, pescarul se apropie de ea cu viteza de $1 + 2 = 3$ km/oră și o regăsește după $4\frac{1}{2} : 3 = 1\frac{1}{2}$ ore, adică la ora *11 și 30 minute*, adică după $11\frac{1}{2} - 8\frac{1}{2} = 3$ ore de la pierdere. În acest timp, scîndura parcursese $1 \cdot 3 = 3$ km.

Cum pierderea s-a produs la 2 km de A, rezultă că regăsirea s-a produs la $2 + 3 = 5$ km de A.

3.30. Primele $\frac{3}{4}$ din drum au fost parcurse în $\frac{41}{76} + \frac{1}{4} = \frac{41 + 19}{76} = \frac{60}{76} = \frac{15}{19}$ ore, cu o viteză care reprezintă $\frac{3}{4} : \frac{15}{19} = \frac{3}{4} \cdot \frac{19}{15} = \frac{19}{20}$ din lungimea drumului.

Dacă restul de $\frac{1}{4}$ din drum a fost parcurs în $\frac{1}{4}$ h, rezultă că întregul drum ar fi fost parcurs într-o oră, mergînd cu viteza a doua. Lungimea drumului (în km) și viteza a doua (în km/h) sînt deci exprimate prin același număr.

Înseamnă că diferența dintre viteza a doua și prima reprezintă $1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$ din lungimea drumului. Lungimea drumului este deci:

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{20} = 5 \text{ km}.$$

Prima viteză este:

$$5 \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4} \text{ km/h},$$

iar viteza a doua 5 km/h.

3.31. În momentul în care bicicliștul va mai avea de parcurs o distanță egală cu $\frac{1}{3}$ din drumul pe care l-a parcurs deja pietonul, distanța dintre sat și oraș poate fi exprimată prin suma dintre întreaga distanță parcursă de biciclist și $\frac{1}{3}$ din distanța parcursă de pieton.

Întreaga distanță parcursă de biciclist într-o oră, plus $\frac{1}{3}$ din cea parcursă de pieton într-o oră este de:

$$12 + 5 \cdot \frac{1}{3} = 13\frac{2}{3} \text{ km.}$$

Numărul de ore cerut în problemă este

$$20{,}5 : 13\frac{2}{3} = \frac{41}{2} : \frac{41}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ ore.}$$

3.32. Primul pionier parcurge într-un minut $\frac{1}{9}$ din distanța dintre ei, iar al doilea $\frac{1}{15}$ din aceeași distanță. Mergînd unul spre celălalt, ei parcurg într-un minut $\frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{8}{45}$ din distanță. Se vor întîlni după $1 : \frac{8}{45} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$ min = = 5 min 37,5 s.

3.33. $2\frac{5}{14}$ ore sau 2 ore 21 min $25\frac{5}{7}$ s.

3.34. Raționînd ca la problemele precedente, găsim că cei doi pionieri s-au întîlnit prima dată după $1\frac{7}{8}$ min. Într-o oră s-au întîlnit de $60 : 1\frac{7}{8} = 60 \cdot \frac{8}{15} = 32$ ori.

3.35. $4\frac{4}{5}$ ore.

3.36. Muncitorul cel vîrstnic parcurge într-un minut $\frac{1}{30}$ din drum, iar cel tînăr $\frac{1}{20}$ din drum. Plecînd cu 5 minute înainte, cel vîrstnic ia un avans de $\frac{1}{30} \cdot 5 =$ $= \frac{1}{6}$ din drum. Într-un minut de mers împreună, cel tînăr face cu $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ din drum mai mult decît cel vîrstnic. Rezultă că avansul de $\frac{1}{6}$ din drum, luat de muncitorul cel vîrstnic, va fi recuperat de cel tînăr în $\frac{1}{6} : \frac{1}{60} = \frac{1}{6} = 10$ minute.

3.37. Un zidar din prima echipă ar termina lucrarea în $16 \cdot 10 = 160$ zile, realizînd zilnic $\frac{1}{160}$ din lucrare, iar unul din echipa a doua în $12 \cdot 18 = 216$ zile, realizînd zilnic $\frac{1}{216}$ din lucrare.

Scanned with OKEN Scanner

5 zidari din prima echipă și 12 zidari din echipa a doua realizează împreună zilnic:

$$\frac{5}{160}+\frac{12}{216}=\frac{1}{32}+\frac{1}{18}=\frac{9}{288}+\frac{16}{288}=\frac{25}{288} \text{ din lucrare.}$$

Întreaga lucrare o vor termina în:

$$1:\frac{25}{288}=\frac{288}{25}=11\frac{13}{25} \text{ zile.}$$

3.38. Curgînd împreună, cele două robinete umplu într-o oră $\frac{1}{12}$ din bazin. După 8 ore de funcționare, ele au umplut $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ din bazin, rămînînd ca restul de $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ din bazin să fie umplut în continuare numai de unul dintre robinete.

Dacă în 10 ore, unul dintre robinete umple $\frac{1}{3}$ din bazin, rezultă că întregul bazin îl va umple în $10:\frac{1}{3}=30$ ore, realizînd pe oră $\frac{1}{30}$ din bazin.

Dacă împreună umplu într-o oră $\frac{1}{12}$ din bazin și unul dintre ele umple singur $\frac{1}{30}$ din bazin, într-o oră, rezultă că celălalt umple $\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$ din bazin într-o oră, iar întregul bazin în $1:\frac{1}{20}=20$ ore.

3.39. 4 zile.

3.40. Într-o oră primul robinet umple $\frac{1}{12}$ din bazin, al doilea $\frac{1}{9}$ și al treilea $\frac{1}{7}$ din bazin.

Primele două robinete umplu împreună într-o oră $\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}$ din bazin, primul și al treilea umplu $\frac{1}{12}+\frac{1}{7}=\frac{19}{84}$ din bazin, iar al doilea și al treilea $\frac{1}{9}+\frac{1}{7}=\frac{16}{63}$ din bazin.

În trei ore, curgînd numai două cîte două în timpuri egale, umplu $\frac{7}{36}+\frac{19}{84}+\frac{16}{63}=\frac{170}{252}=\frac{85}{126}$ din bazin.

Timpul necesar umplerii bazinului va fi deci:

$$3:\frac{85}{126}=\frac{378}{85} \text{ ore} = 4 \text{ ore } 26 \text{ min } 49\frac{7}{17} \text{ s.}$$

În cazul cînd curg toate împreună, timpul de umplere va fi numai de $\frac{2}{3}$, adică $\frac{378}{85}\cdot\frac{2}{3}=\frac{252}{85}$ ore $= 2$ ore 57 min $52\frac{16}{17}$ s.

Scanned with OKEN Scanner

3.41. Curgînd împreună o oră, robinetele A și B umplu $\frac{1}{6}$ din bazin. Tot într-o oră, robinetele B și C umplu $\frac{1}{7\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{15}$ din bazin. Robinetele A și C. curgînd împreună, umplu într-o oră $\frac{1}{10}$ din bazin.

Rezultă că dacă vor curge două cîte două timp de cîte o oră, ceea ce este tot una cu a curge fiecare cîte două ore (sau toate trei împreună timp de două ore), în bazin va curge $\frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{1}{10} = \frac{5+4+3}{30} = \frac{2}{5}$ din bazin.

Curgînd toate trei timp de o oră, se va umple $\frac{2}{5} : 2 = \frac{1}{5}$ din bazin.

Într-o oră, robinetul A umple $\frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$ din bazin. Singur, acest robinet umple bazinul în $1 : \frac{1}{15} = 15$ ore.

Robinetul B umple într-o oră $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ din bazin, deci umple bazinul în $1 : \frac{1}{10} = 10$ ore.

Robinetul C umple într-o oră $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ din bazin, deci umple bazinul singur în $1 : \frac{1}{30} = 30$ ore.

Curgînd toate trei împreună, bazinul se umple în $1 : \frac{1}{5} = 5$ ore.

3.42. Primul robinet umple într-o oră $\frac{2}{3} : 8 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$ din bazin.

Al doilea robinet umple într-o oră $\frac{2}{5} : 6 = \frac{1}{15}$ din bazin.

Toate cele trei robinete vor umple într-o oră, curgînd împreună $\frac{1}{4}$ din bazin.

Al treilea robinet poate umple într-o oră: $\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{1}{10}$ din bazin.

Rezultă că al treilea robinet poate umple singur bazinul în $1 : \frac{1}{10} = 10$ ore.

3.43. Prima țeavă poate umple într-o oră $\frac{1}{15}$ din bazin, a doua țeavă $\frac{1}{15} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{25}$ din bazin, iar a treia țeavă $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{75} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{75}$ din bazin.

Curgînd apă prin toate trei deodată, într-o oră se umple $\frac{1}{15} + \frac{1}{25} + \frac{4}{75} = \frac{4}{25}$ din bazin.

Bazinul va fi plin după $1 : \frac{4}{25} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ ore.

Scanned with OKEN Scanner

3.44. $11\frac{1}{4}$ ore.

3.45. Trenul ce parcurge distanța Tecuci — București face $11\frac{5}{6} - 6\frac{1}{3} = 5\frac{1}{2}$ ore.

Celălalt tren face $9\frac{5}{6} - 4\frac{1}{12} = 5\frac{3}{4}$ ore.

Într-o oră primul parcurge $\frac{1}{5\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{11}$ din distanță.

Al doilea tren, tot într-o oră parcurge: $\frac{1}{5\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{23}{4}} = \frac{4}{23}$. Ambele trenuri într-o oră vor parcurge:

$\frac{2}{11} + \frac{4}{23} + \frac{46+44}{253} = \frac{90}{253}$ din toată distanța. De la plecarea trenului din București până la plecarea celui din Tecuci trec $6\frac{1}{3} - 4\frac{1}{12} = 2\frac{1}{4}$ ore, timp în care primul parcurge $\frac{4}{23} \cdot 2\frac{1}{4} = \frac{4}{23} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{23}$ din distanța București — Tecuci.

După plecarea celui de-al doilea tren, mai rămîne de parcurs $1 - \frac{9}{23} = \frac{14}{23}$ din distanță. Cele două trenuri vor parcurge această distanță în:

$$\frac{14}{23} : \frac{90}{253} = 1\frac{32}{45} \text{ ore} = 1 \text{ oră } 42 \text{ min } 40 \text{ s.}$$

Deci trenurile se întîlnesc la ora 6 și 20 min + 1 oră 42 min 40 s = 8 h 2 min 40 s.

3.46. Un km este parcurs cu căruța goală în $\frac{1}{10}$ ore = 6 minute, iar cu căruța încărcată în $\frac{1}{6}$ ore = 10 minute. Deci 2 km (unul cu căruța goală și altul cu căruța încărcată) îi face în 16 minute.

Într-un minut parcurge în medie $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ km, iar într-o oră viteza medie va fi:

$$\frac{1}{8} \cdot 60 = \frac{60}{8} = 7{,}5 \text{ km/oră.}$$

Observare. Ar fi fost greșit să se facă media vitezelor, care nu este aceeași cu viteza medie.

3.47. 45 piese.

3.48. Suprafața însămînțată cu porumb reprezintă $\frac{3}{4}$ din $1 - \frac{2}{5}$, adică $\left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$ din întreaga suprafață a terenului.

Cu grîu și porumb s-a însămînțat $\frac{2}{5} + \frac{9}{20} = \frac{17}{20}$ din întreaga suprafață, rămînînd pentru cartofi $1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$ din suprafață.

Scanned with OKEN Scanner

Știind că suprafața însămînțată cu cartofi este de 90 ha, putem afla suprafața întregului teren $90 : \frac{3}{20} = 90 \cdot \frac{20}{3} = 600$ ha.

Cu grîu s-au însămînțat $600 \frac{2}{5} = 240$ ha.

3.49. 1 800 lei.

3.50. 105 lei.

3.51. Luăm ca unitate întreaga mărime a suprafeței prășite.

După prima zi, rămîne de prășit $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ din întreaga suprafață.

În a doua zi se prășește $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{10}$ din toată suprafața, rămînînd de prășit:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ din întreaga suprafață.}$$

În a treia zi se prășește $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$ din toată suprafața.

În a treia zi s-a prășit mai mult decît în a doua zi cu:

$\frac{5}{16} - \frac{3}{10} = \frac{25 - 24}{80} = \frac{1}{80}$ din toată suprafața, care reprezintă 3 ha.

Rezultă că suprafața totală semănată cu porumb este de:

$3 : \frac{1}{80} = 240$ ha, iar suprafețele prășite în cele patru zile: 48 ha, 72 ha, 75 ha și 45 ha.

3.52. După prima zi a mai rămas de arat $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ din toată suprafața.

A doua zi a arat $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$ din toată suprafața.

După a doua zi a mai rămas de arat $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{20 - 8 - 5}{20} = \frac{7}{20}$ din toată suprafața.

Suprafața arată în ziua a treia fiind de 21 ha, rezultă că întreaga suprafață a terenului este de $21 : \frac{7}{20} = 21 \cdot \frac{20}{7} = 60$ ha.

Suprafața cultivată cu grîu este de $60 \cdot \frac{3}{8} = 22 \frac{1}{2}$ ha, iar cea cultivată cu porumb de $60 - 22 \frac{1}{2} = 37 \frac{1}{2}$ ha.

Producția totală de grîu a fost de: $19 \frac{1}{2} \cdot 22 \frac{1}{2} = \frac{39}{2} \cdot \frac{45}{2} = \frac{1\,755}{4} = 438{,}75$ q $=$ $= 43\,875$ kg.

Producția de porumb la 1 ha a fost de $103\,237 \frac{1}{2} : 37 \frac{1}{2} = 2\,753$ kg.

Scanned with OKEN Scanner

3.53. 5 500 — 500 = 5 000 lei reprezintă

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ din cît a încasat.}$$

A încasat $5\,000 : \frac{5}{4} = 4\,000$ lei.

Verificare: $4\,000 + \frac{4\,000}{4} + 500 = 5\,500$ lei.

3.54. 452 lei reprezintă $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ din rest. Rezultă că restul (adică a doua parte) este de $452 : \frac{2}{5} = 452\,\frac{5}{2} = 1\,130$ lei.

Jumătate din întreaga sumă este 1 130 — 153 = 977 lei, iar întreaga sumă $977 \cdot 2 = 1\,954$ lei.

3.55. Scoatem întregii din fracție: $7\,\frac{498}{623}$.

$$\begin{array}{r} 498 = 2 \cdot 3 \cdot 83 \\ 623 = 7 \cdot 89 \\ \hline \text{c.m.m.d.c.} = 1 \end{array}$$

Numărătorul și numitorul fracției fiind numere prime între ele, fracția este ireductibilă.

3.56. Avem:

$$A = 0{,}33(314) = \frac{33}{100} + \frac{314}{99\,900} = \frac{33\,281}{99\,900};\quad B = 5{,}7(57) = \frac{57}{10} + \frac{57}{990} = \frac{5\,700}{990} = \frac{190}{33};$$

$$C = 2{,}(71) = 2 + \frac{71}{99} = \frac{269}{99}.$$

3.57. 1.

3.58. $42\,\frac{1}{2}$.

3.59. $\frac{1}{7}$.

3.61. Pentru găsirea c.m.m.m.c. al numitorilor fracțiilor din paranteză, cercetăm mai întîi tabelul numerelor prime și constatăm că numitorii sînt numere compuse. Pentru descompunerea lor cercetăm tabelul cu „cei mai mici divizori" și constatăm că ambii numitori sînt multipli de 43; (2 279 : 43 = 53; 2 021 : 43 = 47). C.m.m.m.c. al numitorilor este deci: $43 \cdot 47 \cdot 53$.

Avem:

$$48\frac{43}{51} \cdot \left(\frac{517}{43 \cdot 47 \cdot 53} + \frac{3\,869}{43 \cdot 47 \cdot 53}\right) = 48\,\frac{43}{51} \cdot \frac{4\,386}{43 \cdot 47 \cdot 53} = \frac{2\,491}{51} \cdot \frac{102}{47 \cdot 53} = 2.$$

3.62. Se procedează ca la exercițiul precedent și se găsește rezultatul 3.

Scanned with OKEN Scanner

3.63. $9\frac{16}{21}$.

3.64. $11\frac{62\,639}{207\,823}$.

3.65. $\dfrac{\left(\frac{15}{16}+1-\frac{7}{9}\right):\left(\frac{495}{660}+2\frac{132}{660}-1\frac{240}{660}-1\frac{220}{660}\right)}{\left(\frac{80}{120}+\frac{75}{120}+4\frac{72}{120}-3\frac{107}{120}\right)-\left(\frac{24}{60}+1\frac{15}{60}-\frac{40}{60}-\frac{27}{60}\right)}=\dfrac{1\frac{23}{144}:\frac{167}{660}}{2-\frac{8}{15}}=$

$$=\frac{\frac{167}{144}\cdot\frac{660}{167}}{1\frac{7}{15}}=\frac{\frac{55}{12}}{\frac{22}{15}}=\frac{55}{12}\cdot\frac{15}{22}=\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}.$$

3.66. 75.

3.67. $\dfrac{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}+3:\frac{6}{5}}{\left(2\frac{3}{5}-\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot1\frac{3}{7}}-\dfrac{1+\frac{4}{1\frac{3}{5}}}{7-\frac{2}{1\frac{1}{3}}}=\dfrac{1-\frac{1}{2}+3\cdot\frac{5}{6}}{\left(2\frac{3}{5}-2\right)\cdot\frac{10}{7}}-\dfrac{1+\frac{4}{\frac{8}{5}}}{7-2\cdot3}=$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{7}}-\frac{1+4\cdot\frac{5}{8}}{7-6}=\frac{3}{\frac{6}{7}}-\frac{1+2\frac{1}{2}}{1}=3\cdot\frac{7}{6}-3\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}=0.$$

3.69. $4\frac{1}{8}$.

3.70. 51.

3.71. 6.

3.72. $1\frac{9}{20}-\dfrac{\left(2\frac{3}{20}-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(\frac{16}{25}-\frac{1}{5}+\frac{7}{25}\right)}{2-\frac{6}{35}}-\frac{13}{15}=1\frac{9}{20}-\dfrac{\frac{5}{9}\cdot\frac{18}{25}}{\frac{64}{35}}-\frac{13}{15}=$

$$=1\frac{9}{20}-\frac{2}{5}\cdot\frac{35}{64}-\frac{13}{15}=\frac{35}{96}.$$

3.73. $\dfrac{\frac{9}{11}+\frac{7}{11}}{\frac{43-11}{209}}-\dfrac{1\frac{23}{42}\cdot32\frac{1}{2}}{\frac{1}{21}}+\frac{15}{2}=\frac{16}{11}\cdot\frac{209}{32}-\dfrac{\frac{65}{42}\cdot\frac{2}{65}}{\frac{1}{21}}+7\frac{1}{2}=$

$$=9\frac{1}{2}-1+7\frac{1}{2}=16.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.74. $1\frac{1}{8}-\left[\frac{227-2}{9\,900}+\frac{17\,045-170}{99\,000}\cdot\frac{\frac{88-8}{90}:\frac{5}{8}-\frac{36-8}{90}:\frac{11}{35}}{\frac{27-2}{90}}+\right.$

$\left.+\frac{(2^3\cdot 5)^{10}}{(8\cdot 7)^5}\cdot\frac{(2\cdot 7)^4}{(3^2\cdot 5)^3}\cdot\frac{(3^3\cdot 7)^7}{(2^3\cdot 5\cdot 7)^6}\cdot\frac{5^4}{2^8}\right]=1\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{44}+\frac{15}{88}\cdot\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{5}-\frac{11}{30}\cdot\frac{35}{11}}{\frac{5}{18}}+\right.$

$\left.+\frac{2^{10}\cdot 5^{10}\cdot 2^4\cdot 7^4\cdot 3^{11}\cdot 7^7\cdot 5^4}{3^5\cdot 7^5\cdot 3^{16}\cdot 5^8\cdot 2^{18}\cdot 5^6\cdot 7^6\cdot 2^8}\right)=1\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{44}+\frac{9}{88}+\frac{1}{4}\right)=1\frac{1}{8}-\frac{33}{88}=$

$=1\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$

3.76. $\frac{2\,077}{2\,142}$.

3.77. $2\frac{9}{14}$.

3.78. $1+\frac{1+\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{\frac{5}{3}}}\left[5-\frac{7}{8}\left(1+\frac{3}{7}\right)+1{,}25-\frac{1}{9}\cdot\left(5-\frac{32}{35}\right)9\right]=$

$=1+\frac{1\frac{3}{4}}{1\frac{3}{5}}\cdot\left(5-\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{7}+1\frac{1}{4}-4\frac{3}{35}\right)=1+\frac{7}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(5-1\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}-4\frac{3}{35}\right)=$

$=1+\frac{35}{32}\cdot\frac{32}{35}=1+1=2.$

3.79. $x=\frac{1+\frac{1+\frac{5}{4}}{5}}{2}=\frac{1+\frac{1+\frac{5}{12}}{5}}{2}=\frac{1+\frac{1+\frac{17}{12}}{5}}{2}=\frac{1+\frac{17}{60}}{5}=\frac{\frac{77}{60}}{2}=\frac{77}{120};$

$E=2+\frac{1}{6+\frac{1}{15+\frac{1}{\frac{77}{120}}}}=2+\frac{1}{6+\frac{1}{15+\frac{120}{77}}}=2+\frac{1}{6+\frac{1}{\frac{1\,275}{77}}}=2+\frac{1}{6+\frac{77}{1\,275}}=$

$=2+\frac{1}{\frac{7\,727}{1\,275}}=2+\frac{1\,275}{7\,727}=2\frac{1\,275}{7\,727}.$

Scanned with OKEN Scanner

3.80. $\left[\left(\frac{3x-4}{5}-15\frac{1}{3}\right)\cdot 3-2+\frac{3}{4}\right]-\frac{2}{5}+1\frac{1}{8}=144\cdot\frac{1}{48}=3.$

$$\left(\frac{3x-4}{5}-15\frac{1}{3}\right)\cdot 3-2+\frac{3}{4}=3+\frac{2}{5}-1\frac{1}{8}=3\frac{2}{5}-1\frac{1}{8}=3\frac{16}{40}-1\frac{5}{40}=2\frac{11}{40}.$$

$$\left(\frac{3x-4}{5}-15\frac{1}{3}\right)\cdot 3=2\frac{11}{40}+2-\frac{3}{4}=4\frac{11}{40}-\frac{3}{4}=3\frac{21}{40}.$$

$$\frac{3x-4}{5}-15\frac{1}{3}=3\frac{21}{40}:3=1\frac{7}{40}.$$

$$\frac{3x-4}{5}=1\frac{7}{40}+15\frac{1}{3}=1\frac{21}{120}+15\frac{40}{120}=16\frac{61}{120}.$$

$$3x-4=16\frac{61}{120}\cdot 5=82\frac{13}{24}.$$

$$3x=4+82\frac{13}{24}=86\frac{13}{24}.$$

$$x=86\frac{13}{24}:3=28\frac{61}{72}.$$

3.81. $0{,}002431_7=\frac{2}{7^3}+\frac{4}{7^4}+\frac{3}{7^5}+\frac{1}{7^6}=\left(\frac{904}{117\,649}\right)_{10};$

$$0{,}0112_6=\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{2}{6^4}=\left(\frac{44}{1\,296}\right)_{10}=\left(\frac{11}{324}\right)_{10}.$$

Capitolul IV

4.1. Pentru a afla volumul în mm^3 trebuie să exprimăm masa în mg.

$M = 18{,}9$ kg $= 18\,900\,000$ mg.

$V=\frac{M}{D}$; $V=\frac{18\,900\,000}{19{,}2}=984\,375$ mm^3.

$V = 984{,}375$ $cm^3 \cong 984$ cm^3 (cu aproximaţie prin lipsă).

$V = 0{,}984375$ $dm^3 \cong 1$ dm^3 (cu aproximaţie prin adaus).

4.2. Masa uleiului din sticlă este de $1{,}3 - 0{,}6 = 0{,}7$ kg, iar volumul sticlei $0{,}7 : 0{,}93 \simeq 0{,}752688$ dm^3 (cu aproximaţie prin lipsă).

4.3. Masa apei dezlocuite este $1{,}5 - 1{,}29 = 0{,}21$ kg, iar volumul apei dezlocuite (adică volumul piesei) 0,21 dm^3.

Volumul cuprului din piesă este de: $1{,}5 : 8{,}8 \cong 0{,}170455$ dm^3 (cu aproximaţie prin adaus).

Piesa are goluri de $0{,}21 - 0{,}170455 = 0{,}039545$ dm^3 (cu aproximaţie prin lipsă) prin care apa nu poate pătrunde, cavităţile fiind în interiorul piesei.

Scanned with OKEN Scanner

4.4. 15% din 36 fac $36 \cdot \frac{15}{100} = \frac{36 \cdot 15}{100}$, iar 36% din 15 fac $15 \cdot \frac{36}{100} = \frac{15 \cdot 36}{100}$, deci sînt egale.

4.5. Dintr-un dm^3 de lapte se scot

$$\frac{1\,030 \times 13}{100} = 133{,}9 \text{ g smîntînă.}$$

Pentru 1 000 grame smîntînă sînt necesari $1\,000 : 133{,}9 \cong 7{,}468$ dm^3 lapte (aprox. prin lipsă).

4.6. Deducem că o zi lucrată de zidar echivalează cu $\frac{148}{100} = \frac{37}{25}$ zile lucrate de ajutorul său. Deci cele 25 de zile lucrate de zidar sînt plătite cît 37 zile lucrate de ajutor. Pentru $37 + 19 = 56$ de zile lucrate, ajutorului i s-ar fi plătit tot 1 792 lei. Ajutorului i se plăteşte pe zi: $1\,792 : 56 = 32$ lei, iar pentru 19 zile: $32 \cdot 19 = 608$ lei. Zidarul a primit: $1\,792 - 608 = 1\,184$ lei.

4.7. Dacă în anii 1955 şi 1957 s-ar fi extras mai mult cărbune cu 1 023,6 t şi respectiv cu 11 387,5 t, atunci în cei trei ani (1938, 1955 şi 1957) s-ar fi produs în total: $15\,985\,494 + 1\,023{,}6 + 11\,387{,}5 = 15\,997\,905{,}1$ tone de cărbuni, ceea ce reprezintă de $1 + 2{,}16 + 2{,}5 = 5{,}66$ ori producţia anului 1938.

Rezultă că în anul 1938 producţia de cărbune a fost de:

$$15\,997\,905{,}1 : 5{,}66 = 2\,826\,485 \text{ tone,}$$

în anul 1955 de:

$$2{,}16 \cdot 2\,826\,485 - 1\,023{,}6 = 6\,104\,184 \text{ tone,}$$

iar în anul 1957 de:

$$2{,}5 \cdot 2\,826\,485 - 11\,387{,}5 = 7\,054\,825 \text{ tone.}$$

Verificare: $2\,826\,485 + 6\,104\,184 + 7\,054\,825 = 15\,985\,494$.

4.8. Suma depăşirilor din cele trei luni reprezintă $\frac{3}{50} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{49}{150}$ din norma lunară. Rezultă că norma lunară este de 98: $\frac{49}{150} = 98 \cdot \frac{150}{49} = 300$ piese.

4.9. Al doilea muncitor execută $\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right) + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$ din lucrare, iar al treilea: $1 - \left(\frac{40}{100} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{20}$ din lucrare sau $\frac{7}{20} \cdot 100 = 35\%$.

Sumele ce se cuvin celor trei muncitori sînt respectiv 40%, 25% şi 35% din suma totală, adică:

$$400 \cdot \frac{40}{100} = 160 \text{ lei;} \quad 400 \cdot \frac{25}{100} = 100 \text{ lei şi } 400 \cdot \frac{35}{100} = 140 \text{ lei.}$$

4.10. Din enunţ rezultă că $\frac{2}{3}$ din aria primei tarlale, $\frac{4}{5}$ din aria tarlalei a doua şi $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ din aria tarlalei a treia sînt egale.

Scanned with OKEN Scanner

Ariile tarlalelor a doua şi a treia, exprimate în fracţii din aria primei tarlale, sînt:

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{6} \text{ şi respectiv } \frac{2}{3}:\frac{7}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}=\frac{20}{21}.$$

Suma ariilor celor trei tarlale reprezintă de $1+\frac{5}{6}+\frac{20}{21}=2\frac{11}{14}$ ori aria primei tarlale.

Aria primei tarlale este deci:

$$351:2\frac{11}{14}=351:\frac{39}{14}=351\cdot\frac{14}{39}=126 \text{ ha.}$$

aria tarlalei a doua:

$$126\cdot\frac{5}{6}=105 \text{ ha}$$

şi aria tarlalei a treia:

$$126\cdot\frac{20}{21}=120 \text{ ha.}$$

4.11. Un kilogram de sămînţă de sfeclă de zahăr cu puritatea de 99% şi cu puterea de germinaţie de 98% echivalează cu:

$$0{,}99\cdot 0{,}98=0{,}9702 \text{ kg}$$

cu puritatea de 100% şi cu puterea de germinaţie de 100%.

Rezultă că pentru un ha vor fi necesare: $29{,}106:0{,}9702=30$ kg de sămînţă de sfeclă cu puritatea de 99% şi puterea de germinaţie de 98%.

4.12. 200 kg.

4.13. După prima reducere de preţuri, perechea de ghete s-a vîndut cu $100-5=95\%$ din preţul iniţial, iar după a doua reducere de preţuri cu: $\frac{95}{100}\cdot\frac{85}{100}=\frac{19}{20}\cdot\frac{17}{20}=\frac{323}{400}$ din preţul iniţial. Preţul iniţial a fost de:

$$64{,}60:\frac{323}{400}=\frac{646}{10}\cdot\frac{400}{323}=80 \text{ lei.}$$

4.14. 600 lei.

4.15. 750 lei.

4.16. 800 lei.

4.17. La etapa pe oraş au participat:

$$36:\frac{40}{100}=\frac{36\cdot 100}{40}=90 \text{ de elevi.}$$

Liceul are:

$$90:\frac{30}{100}=\frac{90\cdot 100}{30}=300 \text{ de elevi.}$$

Scanned with OKEN Scanner

4.18. Prima împreună cu salariul reprezintă 128% din salariul lunar. Se găseşte că salariul lunar este de 1 400 lei.

4.19. Cunoscînd că economiile realizate, de 685 000 lei, reprezintă îndeplinirea angajamentului luat iniţial şi încă o depăşire de 242,50%, rezultă că trebuie să găsim suma din care $100\% + 242{,}50\% = 342{,}50\%$ reprezintă 685 000 lei.

Avem: $685\,000 : \frac{342{,}5}{100} = 200\,000$ lei. Am aflat că angajamentul colectivului fabricii fusese de a face economii în valoare de 200 000 lei.

Verificare: Realizînd economii de 685 000 lei, colectivul fabricii a depăşit angajamentul cu:

$$685\,000 \text{ lei} - 200\,000 \text{ lei} = 485\,000 \text{ lei}.$$

Faţă de angajamentul luat, această depăşire reprezintă:

$$\frac{485\,000}{200\,000} \cdot 100 = 242{,}50\%.$$

4.20. Costul materialelor din care este confecţionată piesa este:

$$283{,}50 : \frac{105}{100} = 283{,}50 \cdot \frac{100}{105} = 270 \text{ lei}.$$

1 gram din al doilea metal costă 1,50 lei.
1 gram din al treilea metal costă 3,00 lei.
1 gram din primul metal costă $\frac{2 \cdot 3}{3} = 2$ lei.
3 grame din primul, 4 din al doilea şi 5 din al treilea metal costă

$$2 \cdot 3 + 1{,}50 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 6 + 6 + 15 = 27 \text{ lei}.$$

Deci $3 + 4 + 5 = 12$ grame de aliaj costă 27 lei.
Întregul aliaj costă de 10 ori mai mult, rezultă că piesa cîntăreşte $12 \cdot 10 = 120$ g.

4.21. Un acru reprezintă $\frac{4046{,}848}{10\,000} = \frac{4\,046\,848}{10\,000\,000} = \frac{31\,616}{78\,125}$ (hectare).

Aria terenului este: $19 \cdot 13 = 247$ (ha), ceea ce reprezintă

$$247 \cdot \frac{78\,125}{31\,616} \text{ acri} = 610\frac{45}{128} \text{ acri} \cong 610{,}35 \text{ acri}.$$

4.22. După contracţie mai rămîne $100\% - 25\% = 75\%$ din volumul iniţial. Volumul mortarului, înainte de contracţie, era de:

$$0{,}45 : \frac{75}{100} = \frac{0{,}45 \cdot 100}{75} = \frac{45}{75} = 0{,}6 \text{ m}^3.$$

Fiind de două ori mai mult nisip decît var, va fi nevoie de: $\frac{0{,}6}{3} = 0{,}2$ m³ var şi $0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$ m³ nisip (pentru 0,45 m³ mortar).

Scanned with OKEN Scanner

4.23. Pentru construcția întregului zid sînt necesari $60 \cdot \frac{32}{100} = 19{,}2$ m³ mortar.

Știind că în construcție intră numai $100 - 3 = 97\%$ din mortarul preparat, rezultă că trebuie preparat $19{,}2 : \frac{97}{100} = \frac{1\,920}{97}$ m³ mortar, pentru care sînt necesare $280 \cdot \frac{1\,920}{97} \cong 5\,542{,}4$ kg ciment.

4.24. Prin vechiul procedeu, pentru executarea unei manivele erau necesare

$$1{,}2 : \frac{50}{100} = 2{,}4 \text{ kg metal,}$$

pentru executarea unei pîrghii:

$$0{,}85 : \frac{60}{100} = \frac{85}{100} \times \frac{100}{60} = \frac{17}{12} = 1\,\frac{5}{12} \text{ kg metal,}$$

iar pentru executarea unei mașini:

$$2{,}4 + 1\,\frac{5}{12} \cdot 6 = 2{,}4 + \frac{17}{12} \cdot 6 = 2{,}4 + 8{,}5 = 10{,}9 \text{ kg metal.}$$

Prin noul procedeu, cantitățile de metal folosite sînt:

$$1{,}2 : \frac{80}{100} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{4} = 1{,}5 \text{ kg pentru o manivelă,}$$

$$0{,}85 : \frac{85}{100} = \frac{85}{100} \times \frac{100}{85} = 1 \text{ kg pentru o pîrghie și}$$

$$1{,}5 + 1 \cdot 6 = 1{,}5 + 6 = 7{,}5 \text{ pentru o mașină.}$$

La mașină s-a economisit $10{,}9 - 7{,}5 = 3{,}4$ kg metal iar la 1 000 de mașini $3{,}4 \times 1\,000 = 3\,400$ kg metal.

Din acest metal se pot turna, în plus, piese pentru:

$$3\,400 : 7{,}5 \simeq 453 \text{ mașini.}$$

4.25. Un muncitor realiza înainte $\frac{1}{5}$ din producția echipei sale, iar acum realizează $\frac{1}{4}$ din aceasta, adică mai mult cu: $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ din producția echipei. Creșterea productivității reprezintă $\left(\frac{1}{20} : \frac{1}{5}\right) 100 = 25\%$.

4.26. Înainte de inovație într-o oră se executau $60 : 15 = 4$ piese. După inovație se execută $60 : 10 = 6$ piese, adică cu $6 - 4 = 2$ piese mai mult. Productivitatea muncii a crescut cu $\frac{2}{4} \cdot 100 = 50\%$.

4.27. La $100 - 16 = 84\%$ produse fabricate au fost 16% deșeuri deci procentele de deșeuri față de produse fabricate reprezintă $\frac{16 \cdot 100}{84} = 19{,}05\%$.

Scanned with OKEN Scanner

4.28. Procentul de rebuturi, după inovație, a scăzut cu $\frac{4 \cdot 10}{100} = 0{,}4\%$.

Datorită inovației, producția a crescut de la 96% la 96,4%, sau, în procente, $\frac{96{,}4 \cdot 100}{96} \simeq 100{,}42\%$, deci a crescut cu 0,42% față de anul trecut.

4.29. Carbon: $\frac{9{,}4 \cdot 100}{13} = \frac{940}{13} \cong 72{,}31\%$;

Hidrogen: $\frac{100}{13} \cong 7{,}69\%$; Oxigen: $\frac{70}{13} \simeq 5{,}38\%$;

Azot: $\frac{60}{13} \cong 4{,}62\%$.

4.30. Masa celor 650 pîini este de:

$$750 \cdot 650 = 487\,500 \text{ g} = 487{,}500 \text{ kg},$$

iar a apei absorbite:

$$487{,}50 - 375 = 112{,}50 \text{ kg}.$$

Procentul de apă față de făină este:

$$\frac{112{,}50 \cdot 100}{375} = 30\%.$$

4.31. 637,55%.

4.32. Statului au fost vîndute 186,4 q = 18 640 kg de grîu. Cooperatorilor li s-au împărțit:

$$64\,000 - 5\,360 - 18\,640 = 40\,000 \text{ kg de grîu}.$$

Procentual, această cantitate de grîu este de: $\frac{40\,000 \cdot 100}{64\,000} = 62{,}50\%$.

Valoarea grîului vîndut statului este de $1{,}05 \cdot 18\,640 = 19\,572$ lei.

4.33. Ca urmare a introducerii liniei tehnologice de forjare și tratament termic, într-un schimb se realizează cu 25 — 8 = 17 osii mai mult, ceea ce reprezintă o creștere a productivității muncii de $\frac{17}{8} \cdot 100 = 212{,}50\%$.

În același timp consumul de metal a scăzut cu 714 — 595 = 119 kg, ceea ce procentual reprezintă $\frac{119}{714} \cdot 100 \cong 16{,}67\%$.

4.34. Cantitatea de sare este de $\frac{8 \cdot 2400}{100} = 192$ dm³.

Cantitatea de apă sărată, după adăugarea celor 900 dm³ de apă dulce este: 2 400 + + 900 = 3 300 dm³, iar noua concentrație de sare: $\frac{192 \cdot 100}{3\,300} = \frac{64}{11} = 5{,}(81)\%$.

Scanned with OKEN Scanner

4.35. Considerînd volumul inițial al apei egal cu unitatea, volumul gheții reprezintă $1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11}$ din volumul apei.

Prin topire, volumul gheții devine $1 : \frac{12}{11} = \frac{11}{12}$ din cît era la început, adică se micșorează cu $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$ sau $\frac{1}{12} \cdot 100 = 8{,}33\%$.

4.36. Dacă în $12 - 2 = 10$ luni, uzina a executat 3 000 transformatoare, rezultă că într-o lună a executat $3\,000 : 10 = 300$, iar într-un an $300 \cdot 12 = 3\,600$, adică cu $3\,600 - 3\,000 = 600$ mai mult decît prevedea planul.

Depășirea planului reprezintă $\frac{600}{3\,000} \cdot 100 = 20\%$.

4.37. *a)* Planul a fost îndeplinit în proporție de $\frac{12}{8} \cdot 100 + 150\%$, ceea ce reprezintă o depășire de $150 - 100 = 50\%$.

b) Mărindu-se norma cu 25%, sarcina de plan pentru anul 1959 s-a mărit de $\frac{5}{4}$ ori. Mărindu-și randamentul cu 20%, strungarul va realiza planul în proporție de $\frac{150}{100} \cdot \frac{120}{100} = \frac{180}{100} = 180\%$ față de anul 1958. Planul pe anul 1959 va fi realizat în $\frac{5}{4} : \frac{180}{100} = \frac{5}{4} \cdot \frac{100}{180} = \frac{25}{36}$ dintr-un an, adică în $12 \cdot \frac{25}{36} = 8\frac{1}{3}$ luni.

4.38. 200 kg antracit conțin $\frac{200 \cdot 95}{100} = 190$ kg carbon.

Dacă cele 266 kg ar fi fost numai turbă, ar fi conținut $\frac{266 \cdot 54}{100} = 143{,}640$ kg carbon. Diferența $190 - 143{,}640 = 46{,}360$ kg provine de la cantitatea de cărbune de pămînt care a intrat în amestec. Cărbunele de pămînt conține mai mult carbon decît turba cu: $79\% - 54\% = 25\%$. Rezultă deci că au existat $46{,}360 : 0{,}25 = 185{,}44$ kg cărbuni de pămînt, iar turbă $266 - 185{,}440 = 80{,}560$ kg.

Procentul de turbă din amestec este de $\frac{80{,}560}{266}\ 100 \cong 30{,}29\%$.

4.39. *a)* 61 440 de vagoane; *b)* 0,067 vagoane la ha.

4.40. Dacă prețul ambelor cărți s-ar fi redus cu cîte 10%, atunci ele ar fi costat, după reducere $30 \cdot \frac{90}{100} = 27$ lei, adică cu $27 - 26{,}40 = 0{,}60$ lei mai mult.

Diferența de 0,60 lei se datorește faptului că la cea de-a doua carte reducerea prețului a fost cu $15\% - 10\% = 5\%$ mai mare.

Rezultă că prețul cărții a doua a fost înainte de reducere de: $0{,}60 : \frac{5}{100} = 12$ lei, iar după reducere de: $12 \cdot \frac{85}{100} = 10{,}20$ lei.

Prima carte costă, după reducerea de prețuri, $(30 - 12) \cdot \frac{90}{100} = 16{,}20$ lei.

Verificare: $10{,}20 + 16{,}20 = 26{,}40$.

Scanned with OKEN Scanner

4.41. Dacă și rația cailor s-ar fi mărit tot cu 20%, atunci s-ar fi dat în total $250 \cdot \frac{120}{100} = 300$ kg de fîn pe zi, adică cu $306 - 300 = 6$ kg mai puțin.

Diferența de 6 kg se datorește faptului că pentru cei 12 cai, rația s-a mărit cu $25\% - 20\% = 5\%$ mai mult decît pentru cele 20 de vaci.

Rezultă că rația celor 12 cai era inițial de $6 : \frac{5}{100} = 120$ kg, ceea ce revine la $120 : 12 = 10$ kg de fîn pentru un cal pe zi.

Rația unei vaci era de: $\frac{250 - 10 \cdot 12}{20} = \frac{250 - 120}{20} = \frac{130}{20} = 6{,}5$ kg de fîn pe zi.

Pentru un cal, se planificase la început cu $\frac{25}{125} \cdot 100 = 20\%$ mai puțin față decît se dă după mărirea rației, iar pentru o vacă cu $\frac{20}{120} \cdot 100 \cong 16{,}67\%$ mai puțin.

4.42. *Soluția. a)* $101 + 11 = 112$; zinc este $\frac{67{,}2 \cdot 101}{112} = 60{,}6$ kg; cositor $67{,}2 - 60{,}6 = 6{,}6$ kg.

b) $\frac{60{,}6 \cdot 100}{67{,}2} \cong 90{,}18$ zinc și 9,82 cositor.

4.43. Primul robinet umple într-o oră $\frac{1}{3}$ din bazin, al doilea $\frac{1}{7}$ și al treilea $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$. Toate trei umplu într-o oră $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{10}{21} = \frac{20}{21}$ din bazin, iar în 50 de minute $\frac{50}{63}$ din bazin. Procentual, această fracție reprezintă $\frac{50}{63} \cdot 100 \cong 79{,}37\%$.

Capitolul V

5.1. Scoțînd rădăcina pătrată a lui 1 971 cu aproximație mai mică de 0,1 obținem $\sqrt{1\,971} \cong 44{,}4 < 45$. Anul care urmează să fie pătrat perfect este $45^2 = 2\,025$.

Avem $10^3 = 1\,000$; $11^3 = 1\,331$; $12^3 = 1\,728$ și $13^3 = 2\,197$, deci 1 728 a fost ultimul an cub perfect.

5.2. Pătratele perfecte de două cifre sînt: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Pentru ca $\overline{ab}$, $a + b$ și b să fie pătrate perfecte convine numai 81. Diferența $c - b$ fiind pătrat perfect (adică $c - 1$ pătrat perfect), rezultă că c nu poate fi decît unu, doi sau cinci. Numărul cerut este de forma $\overline{811de}$, $\overline{812de}$, sau $\overline{815de}$.

Rădăcina pătrată a numărului căutat este cuprinsă între $\sqrt{81\,100} \cong 284{,}8$ și $\sqrt{81\,599} \cong 285{,}7$.

Cum numărul căutat trebuie să fie pătrat perfect întreg, acesta nu poate fi decît $285^2 = 81\,225$.

Scanned with OKEN Scanner

5.3. *Soluția a)* Latura pătratului căutat este cel mai mare număr întreg care satisface relația $l < \sqrt{1\,966} \cong 44{,}3$, adică este de 44 m, iar perimetrul pătratului $44 \cdot 4 = 176$ m.

b) Latura pătratului căutat este cel mai mic număr întreg care satisface relația $l > \sqrt{1\,967} \cong 44{,}4$, adică este de 45 m.

5.4. Luna ianuarie are 31 zile, deci vîrsta persoanei nu era mai mare de 31 ani, în 1963.

Anul nașterii persoanei este cuprins între $1963 - 31 = 1932$ și 1963. Întrucît $\sqrt{1\,963} \cong 44{,}3$, cel mai apropiat pătrat perfect este $44^2 = 1936$.

Fiind născută în anul 1936, persoana a împlinit în anul 1963 vîrsta de $1963 - 1936 = 27$ ani. Ea este deci născută la 27 ianuarie 1936.

5.5. Dacă aria laterală se desfășoară într-un pătrat, înălțimea paralelipipedului este egală cu perimetrul bazei, iar latura bazei este $\frac{1}{4}$ din înălțime. Avem:

$$l^2 = 1\,024;\ l = \sqrt{1\,024} = 32 \text{ dm};\ l = \frac{1}{4} I = 8 \text{ dm}.$$

Volumul paralelipipedului pătratic drept este:

$$V = l^2 I;\ V = 8^2 \cdot 32 = 2\,048 \text{ dm}^3 = 2{,}048 \text{ m}^3.$$

5.6. 14 580 este de $3 \cdot 5 = 15$ ori mai mare decît produsul numerelor date. Produsul numerelor date este deci: $\frac{14\,580}{15} = 972$. Dacă suma lor este mai mare de 4 ori decît cel mai mic, înseamnă că cel mare este de 3 ori mai mare decît cel mic.

Împărțind produsul lor (972) la 3, obținem pătratul celui mai mic:

$$\frac{972}{3} = 324;\ \sqrt{324} = 18.$$

Prin urmare 18 este numărul cel mic și $3 \cdot 18 = 54$ este numărul cel mare.

Verificare: $(5 \cdot 18) \cdot (3 \cdot 54) = 14\,580$; $18 + 54 = 72$; $72 : 4 = 18$.

5.7. Lungimea fișiei celei mari întrece pe cea a fișiei celei mici cu latura unui pătrat de 81 m², adică cu $\sqrt{81} = 9$ m. Aceasta este tocmai lățimea fișiilor.

Rezultă că latura pătratului dat inițial este $9 : \frac{15}{100} = 60$ m, iar cea a pătratului obținut după scoaterea fișiilor, de: $60 - 9 = 51$ m.

5.8. Dacă 12% reprezintă 617,728608 m², atunci aria locului este de:

$$617{,}728608 : \frac{12}{100} = 5\,147{,}7384 \text{ m}^2.$$

Dacă notăm cu L lungimea dreptunghiului, lățimea va fi $\frac{3}{5} L$, iar aria $\frac{3}{5} L^2$. Rezultă că:

$$L^2 = 5\,147{,}7384 : \frac{3}{5} = 8\,579{,}564 \text{ m}^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$L = \sqrt{8\,579{,}564} \cong 92{,}63 \text{ m}; \quad \frac{3}{5} L \cong 55{,}58 \text{ m}.$$

5.9. Numărul dat se mai poate scrie:

$N = (2 \cdot 5) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 31) \cdot (5 \cdot 13) \cdot 2^7 \cdot (2^3 \cdot 31) = 2^{12} \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2 = (2^6 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31)^2 = 128\,960^2$.

Rădăcina pătrată este:

$$\sqrt{N} = \sqrt{128\,960^2} = 128\,960.$$

5.10.

$$1\frac{2}{13} \cdot \left\{1\frac{9}{10} \cdot \left[\left(2{,}15 - 1\frac{107}{180}\right) \cdot \left(\frac{16}{25} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdot 196\right)\right] : \left(1 - \frac{11}{5} \times \frac{1}{7}\right)\right\} =$$

$$= 1\frac{2}{13} \cdot \left\{1\frac{9}{10} \cdot \left[\left(2\frac{3}{20} - 1\frac{107}{180}\right) \cdot \left(\frac{16}{25} - \frac{1}{5} + 28\right)\right] : \left(1 - \frac{11}{35}\right)\right] =$$

$$= 1\frac{2}{13} \cdot \left[1\frac{9}{10} \cdot \left(\frac{100}{180} \cdot \frac{711}{25}\right) : \frac{24}{35}\right] = 1\frac{2}{13} \cdot \left(\frac{19}{10} \cdot \frac{79}{5} \cdot \frac{35}{24}\right) =$$

$$= \frac{15}{13} \cdot \frac{10\,507}{240} = \frac{10\,507}{208} = 5\frac{107}{208}.$$

5.11. 21.

5.12. $N = \sqrt{\frac{242}{6} \cdot \sqrt{162 - 18} + 12 + 3} = \sqrt{1 + 15} = \sqrt{16} = 4.$

5.13.

$$\frac{\left(12\frac{7}{8} - \frac{2}{9} \cdot \frac{21}{16} - 4\frac{37}{60}\right) : 4\frac{4}{5}}{\left(1\frac{5}{29} + 3\frac{5}{9} : 19\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{58}{59}} : 4\frac{47}{48} = \frac{7\frac{29}{30} : 4\frac{4}{5}}{\left(1\frac{5}{29} + \frac{16}{87}\right) \cdot \frac{58}{59}} \cdot \frac{48}{239} =$$

$$= \frac{\frac{239}{144}}{\frac{118}{87} \cdot \frac{58}{59}} \cdot \frac{48}{239} = \frac{239}{144} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{48}{239} = \frac{1}{4}.$$

5.14.

$$\frac{\left\{10 - 8 \cdot \frac{461 - 46}{900} + \frac{1}{24} - \left[6\frac{1}{3} - \left(6 + \frac{1}{18}\right)\right]\right\}}{3{,}9986 + \frac{1}{10} \cdot 0{,}014} = \frac{10 - 8 \cdot \left[\frac{83}{180} + \frac{1}{24} - \left(6\frac{1}{3} - 6\frac{1}{18}\right)\right]}{3{,}9986 + 0{,}0014} =$$

$$= \frac{10 - 8 \cdot \left(\frac{83}{180} + \frac{1}{24} - \frac{5}{18}\right)}{4} = \frac{10 - 8 \cdot \frac{166 + 15 - 100}{360}}{4} = \frac{10 - \frac{81}{45}}{4} = \frac{41}{20} = 2\frac{1}{20}.$$

5.15. $\dfrac{2\frac{4}{5}+\frac{11}{2}\cdot\frac{2}{7}-\frac{6}{35}}{\left(2\frac{17}{20}+\frac{21}{40}\right)\cdot\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}}:2\frac{4}{5}=\dfrac{2\frac{28}{35}+1\frac{20}{35}-\frac{6}{35}}{3\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}}:2\frac{4}{5}=\dfrac{4\frac{1}{5}}{\frac{27}{8}\cdot\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}}:2\frac{4}{5}=$

$$=\frac{4\frac{1}{5}}{2\frac{1}{4}-1\frac{1}{4}}:2\frac{4}{5}=\frac{21}{5}\cdot\frac{5}{14}=1\frac{1}{2}.$$

5.16. $2\frac{239}{400}$.

5.17. $\left[\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}003}{0{,}4\cdot 4:\frac{1}{5}}-\dfrac{\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{2}}{4\cdot 0{,}125}\right]:62\frac{1}{20}\cdot\dfrac{1\frac{1}{3}+\frac{5}{9}+1\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1\,024}{81}}}=\left(\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1\,000}{3}}{8}-\dfrac{\frac{9}{40}}{\frac{1}{2}}\right):$

$$:\frac{1\,241}{20}\cdot\frac{3\frac{5}{9}}{\frac{32}{9}}=\left(\frac{125}{2}-\frac{9}{20}\right)\cdot\frac{20}{1\,241}=\frac{1\,241}{20}\cdot\frac{20}{1\,241}=1.$$

5.18. $2\frac{2}{3}$.

5.19. Pentru aducerea fracţiilor din paranteză la acelaşi numitor, cercetăm tabelul cu „cei mai mici divizori". Avem:

$$\sqrt{\frac{17\,437+44\,368+53\,159}{41\cdot 47\cdot 53\cdot 59}\cdot\frac{146\,969}{701}}=\sqrt{\frac{2\,804}{47\cdot 53\cdot 59}\cdot\frac{146\,969}{701}}=\sqrt{4}=2.$$

5.20. Se calculează mai întîi expresiile A şi B $\left(\text{se găseşte } A=1\frac{1}{4} \text{ şi } B=1\frac{2}{9}\right)$ şi apoi se înlocuiesc valorile găsite în expresia E şi se efectuează operaţiile indicate de semne:

$$E=\sqrt{89-1\frac{8}{9}}=\sqrt{87\frac{1}{9}}=\frac{28}{3}==9\frac{1}{3}.$$

5.21. 1.

5.22. *a)* Produsul mezilor împărţit la extremul cunoscut:

$$x=\frac{4\frac{1}{6}\cdot 7\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}}=13\frac{8}{9}.$$

b) Produsul extremilor împărţit la mediul cunoscut: $x=\dfrac{1{,}9\cdot 2{,}52}{1{,}14}=4{,}2.$

5.23. *a)* $x=\dfrac{3{,}05\cdot\frac{1}{8}}{1\frac{21}{40}\cdot\frac{1}{4}}=1$; *b)* $x=\dfrac{2\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{0{,}125\cdot 1\frac{1}{2}}=10.$

Scanned with OKEN Scanner

5.24. *a)* $x = \dfrac{3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{3}}{1\frac{1}{9} \cdot \frac{4}{7}} = 14$; *b)* $x = \dfrac{\frac{14\,518 - 145}{990} \cdot 1}{\frac{136 - 1}{9\,900} \cdot 1\frac{2}{3}} = 638{,}8.$

5.25. $x = \dfrac{\left(\frac{3}{4} + \frac{56 - 5}{90} + 1\frac{1}{4}\right) \cdot 3\frac{1}{33}}{\frac{2}{3} \cdot \left(1\frac{7}{12} - \frac{416 - 41}{900}\right)} = 10.$

5.26. *a)* $\dfrac{x + 15 - x}{x} = \dfrac{8 - 6}{6} \Leftrightarrow \dfrac{15}{x} = \dfrac{2}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{15 \cdot 6}{2} = 45.$

b) $\dfrac{x - (x - 2{,}5)}{2 - 1\frac{1}{2}} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2{,}5}{0{,}5} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \cdot 2{,}5}{0{,}5} = 10.$

5.27. *a)* $\dfrac{(7{,}5 - x) + (3{,}5 + x)}{3{,}5 + x} = \dfrac{5 + 6}{6} \Leftrightarrow \dfrac{11}{3{,}5 + x} = \dfrac{11}{6} \Leftrightarrow 3{,}5 + x = 6 \Leftrightarrow x =$

$= 6 - 3{,}5 = 2{,}5;$

b) $\dfrac{\frac{1}{3} + x}{\left(\frac{3}{4} + x\right) - \left(\frac{1}{3} + x\right)} = \dfrac{7}{9 - 7} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{3} + x}{\frac{5}{12}} = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} + x = \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow x =$

$= \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{3} = 1\dfrac{1}{8}.$

5.28. Dacă notăm cu x suprafaţa ocupată de apă, avem: $\dfrac{1}{2{,}4} = \dfrac{149}{x}$. De unde $x = 2{,}4 \cdot 149 = 357{,}6$ milioane km².

5.29. $1\,771\dfrac{2}{3}$ km.

5.30. Dacă notăm cu t_1 şi t_2 duratele oscilaţiilor a două pendule şi cu l_1 şi l_2 lungimile lor, avem:

$$\frac{t_1}{\sqrt{l_1}} = \frac{t_2}{\sqrt{l_2}}.$$

În cazul de faţă, cînd $t_1 = 1$ s, $l_1 = 99$ cm $= 990$ mm, $l_2 = 561$ mm, avem:

$$\frac{1}{\sqrt{990}} = \frac{t_2}{\sqrt{561}}; \quad t_2 = \frac{\sqrt{561}}{\sqrt{990}} = \sqrt{\frac{561}{990}} = \sqrt{\frac{17}{30}} = \sqrt{0{,}5(6)} \cong 0{,}75 \text{ s}.$$

Într-o zi (24 ore $= 86\,400$ sec), al doilea pendul va avea $n = 86\,400 \cdot \sqrt{\frac{30}{17}} \simeq$ $\simeq 114\,776$ oscilaţii.

Scanned with OKEN Scanner

5.31. Fie a şi b cele două cifre ale numărului. Avem $\frac{a-b}{a+b}=\frac{4}{5}$. Formăm o proporţie derivată:

$$\frac{(a+b)-(a-b)}{(a+b)+(a-b)}=\frac{5-4}{5+4}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{1}{9}.$$

De unde $a=9b$. Deoarece a şi b sînt cifre, singura pereche de valori care verifică relaţia este: $a=9$, $b=1$. Numărul căutat este 91 sau 19.

5.32. Dacă notăm cu x preţul mărfii după prima reducere de preţuri, atunci cele două reduceri sînt $1\,080-x$ şi $x-874{,}80$.

Putem scrie proporţia:

$$\frac{1\,080-x}{x}=\frac{x-874{,}80}{874{,}80}.$$

Formăm o proporţie derivată:

$$\frac{1\,080-x+x}{x}=\frac{x-874{,}80+874{,}80}{874{,}80};\ \frac{1\,080}{x}=\frac{x}{874{,}90}.$$

De unde $x^2=1\,080\cdot 874{,}80=944\,784$ şi apoi $x=\sqrt{944\,784}=972$ lei.

5.33. Dacă notăm cu m şi n cele două numere, avem:

$$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}\text{ şi }m-n=30.$$

Formăm o proporţie derivată:

$$\frac{m-n}{n}=\frac{3-2}{2}\Leftrightarrow\frac{m-n}{n}=\frac{1}{2}.$$

Cum $m-n=30$, obţinem:

$$\frac{30}{n}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow n=30\cdot 2=60$$

şi apoi

$$\frac{m}{60}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow m=\frac{60\cdot 3}{2}=90.$$

5.34. 0,45.

5.35. $\frac{1}{3}$.

5.36. *a)* $N=\frac{32}{75}=\frac{2^5}{3\cdot 5^2}=\frac{2^5\cdot 3}{3^2\cdot 5^2}$; $\sqrt{N}=\sqrt{\frac{2^5\cdot 3}{3^2\cdot 5^2}}=\frac{2^2}{3\cdot 5}\sqrt{2\cdot 3}=$

$$=\frac{4}{15}\sqrt{6}\approx\frac{4}{15}\cdot 2{,}4495.$$

$N=0{,}6532$. *b)* $N=\frac{32}{75}=0{,}42\ (6)$; $\sqrt{N}=\sqrt{0{,}42\ (6)}\approx 0{,}6532$.

5.37. *a)* 6 şi 9 muncitori; *b)* cîte 1 muncitor.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

6.1. Sumele cuvenite echipelor sînt direct proporţionale cu numărul de zile-om lucrate de fiecare dintre ele:

$$\frac{S_1}{24 \cdot 45} = \frac{S_2}{35 \cdot 21}.$$

În proporţia formată, schimbînd mezii între ei, obţinem raportul cerut:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{24 \cdot 45}{35 \cdot 21} = \frac{72}{49}.$$

6.2. Dacă notăm cu v viteza medie a unui tren tractat de o locomotivă cu abur, viteza unui tren tractat de o locomotivă electrică va fi $\frac{3}{2}v$.

Dacă notăm cu t timpul necesar unui tren tractat de o locomotivă cu abur, pentru a parcurge o distanţă oarecare, atunci timpul în care aceeaşi distanţă va fi parcursă de un tren tractat de o locomotivă electrică va fi $\frac{2}{3}t$.

Dacă notăm cu M tonajul mediu al unui tren tractat de o locomotivă cu abur, atunci tonajul mediu al unui tren tractat de o locomotivă electrică este $\frac{135}{100}M = \frac{27}{20}M$.

Considerînd ca unitate raportul $\frac{M}{t}$ (masa tractată de o locomotivă cu abur în unitate de timp), raportul

$$\frac{27}{20}M : \frac{2}{3}t = \frac{27}{20}M\frac{3}{2t} = \frac{81}{40}\frac{M}{t}$$

reprezintă greutatea tractată de o locomotivă electrică în unitatea de timp.

Rezultă deci că posibilitatea de remorcare a unei locomotive electrice, faţă de o locomotivă cu abur a crescut de: $\frac{81}{40} = 2{,}025$ ori sau cu 102,5%.

6.3. Numărul ţăranilor cooperatori este direct proporţional cu cantitatea de muncă (fracţia din lucrarea de executat) şi invers proporţional cu timpul de lucru (zile şi ore). Dacă notăm cu n numărul de ţărani cooperatori necesari pentru a termina restul de $\frac{2}{5}$ din lucrare, în condiţiile problemei, atunci avem:

$$n = \frac{36 \cdot 7 \cdot 8\frac{1}{4} \cdot 2}{2 \cdot 10\frac{1}{2} \cdot 3} = \frac{36 \cdot 7 \cdot 33 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 3} = 66.$$

Cum brigada era formată iniţial din 36 de ţărani cooperatori, rezultă că mai sînt necesari încă $66 - 36 = 30$ de ţărani cooperatori.

6.4. În primele 5 zile se realizează $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ din lucrare, rămînînd de efectuat $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ din lucrare.

Scanned with OKEN Scanner

Avem de rezolvat următoarea problemă de trei compusă: Dacă 12 lucrători termină o lucrare în 25 de zile, în cît timp 6 lucrători vor termina $\frac{4}{5}$ din lucrare.

12 lucr. ..... 1 ..... 25 zile
6 lucr. ..... $\frac{4}{5}$ ..... x zile

---

1 ..... 1 ..... $25 \cdot 12$
1 ..... $\frac{4}{5}$ ..... $25 \cdot 12 \cdot \frac{4}{5}$
6 ..... $\frac{4}{5}$ ..... $25 \cdot 12 \cdot \frac{4}{5}$

$\frac{25 \cdot 12 \cdot \frac{4}{5}}{6} = 40$ zile

Altă soluție: După ce brigada a lucrat 5 zile, restul lucrării s-ar fi terminat în $25 - 5 = 20$ zile dacă ar fi lucrat întreaga brigadă. Dar cum brigada s-a micșorat de $12 : 6 = 2$ ori, rezultă că timpul se va dubla $20 \cdot 2 = 40$ zile.

6.5. 490 m³ .....7 zile.....6 ore/zi ..... 10 muncitori
980 m³ .....5 zile.....8 ore/zi ..... x muncitori

---

490 ..... 7 ..... 1 ..... $10 \cdot 6$
490 ..... 1 ..... 1 ..... $10 \cdot 6 \cdot 7$
1 ..... 1 ..... 1 ..... $\frac{10 \cdot 6 \cdot 7}{490}$
980 ..... 1 ..... 1 ..... $\frac{10 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 980}{490}$
980 ..... 5 ..... 1 ..... $\frac{10 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 980}{490 \cdot 5}$
980 ..... 5 ..... 8 ..... $\frac{10 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 980}{490 \cdot 5 \cdot 8} = 21$ muncitori

6.6. $0,3(6) = \frac{36 - 3}{90} = \frac{11}{30}$; $1 - 0,3(6) = 1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}$

11 părți ..... 11 zile ..... $6\frac{2}{3}$ ore/zi ..... 54 muncit.
19 părți ..... 15 zile ..... 6 ore/zi ..... x muncit.

---

1 ..... 11 ..... $6\frac{2}{3}$ ..... $\frac{54}{11}$
1 ..... 1 ..... $6\frac{2}{3}$ ..... $\frac{54 \cdot 11}{11}$
1 ..... 1 ..... 1 ..... $\frac{54 \cdot 11 \cdot 6\frac{2}{3}}{11}$
1 ..... 1 ..... 6 ..... $\frac{54 \cdot 11 \cdot 6\frac{2}{3}}{11 \cdot 6}$
1 ..... 15 ..... 6 ..... $\frac{54 \cdot 11 \cdot 6\frac{2}{3}}{11 \cdot 6 \cdot 15}$
19 ..... 15 ..... 6 ..... $\frac{54 \cdot 11 \cdot 6\frac{2}{3} \cdot 19}{11 \cdot 6 \cdot 15} = 76$ muncitori

$76 - 54 = 22$ muncitori noi angajați.

Scanned with OKEN Scanner

6.7.

3 muncitori ..... 1 000 piese ..... 8 ore
9 muncitori ..... 4 500 piese ..... x ore ; $x = \frac{8 \cdot 3 \cdot 4\,500}{1\,000 \cdot 9} = 12$ ore

1 000 piese ..... 8 ore .....3 muncitori
3 000 piese .....12 ore.....y muncitori ; $y = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3\,000}{1\,000 \cdot 12} = 6$ muncitori.

3 muncitori ..... 8 ore..... 1 000 piese
12 muncitori .....10 ore..... z piese ; $z = \frac{1\,000 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 8} = 5\,000$ piese.

6.8. Fie x, y, z cantităţile de nisip, sodă şi var exprimate în tone. Avem:

$$\frac{x}{68} = \frac{y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{x+y+z}{68+36+20} = \frac{372}{124} = 3.$$

De unde:

$x = 204$ t $= 204\,000$ kg; $y = 108$ t $= 108\,000$ kg şi $z = 60$ t $= 60\,000$ kg.

6.9. Fie x, y, z, sumele cuvenite celor trei lucrători. Avem:

$$\frac{x}{94} = \frac{y}{140} = \frac{z}{152} = \frac{x+y+z}{94+140+152} = \frac{2\,123}{386} = 5{,}5$$

$$\frac{x}{94} = 5{,}5;\ x = 94 \cdot 5{,}5 = 517 \text{ lei}$$

$$\frac{y}{140} = 5{,}5;\ y = 140 \cdot 5{,}5 = 770 \text{ lei}$$

$$\frac{z}{152} = 5{,}5;\ z = 152 \cdot 5{,}5 = 836 \text{ lei}.$$

6.10. Dintre toate ariile, cea însămînţată cu ovăz este cea mai mică. Considerînd aria semănată cu ovăz — o parte , atunci cu orz s-au semănat 2 părţi, cu grîu 6 părţi şi cu secară 4 părţi. Notînd cu x, y, z, t ariile semănate cu ovăz, orz, grîu şi secară, avem:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} = \frac{t}{4} = \frac{x+y+z+t}{1+2+6+4} = \frac{1\,300}{13} = 100,$$

de unde:

$$x = 100 \text{ ha};\ y = 200 \text{ ha};\ z = 600 \text{ ha şi } t = 400 \text{ ha}.$$

6.11. Dacă viteza trenului a fost de 4 ori mai mare decît cea a trăsurii, iar pe jos a mers de 3 ori mai încet decît cu trăsura, rezultă că viteza trenului este $3 \cdot 4 = 12$ ori mai mare decît cea cu care a mers pe jos.

Distanţele parcurse fiind direct proporţionale cu vitezele, rezultă că lungimile drumurilor parcurse în cele trei etape sînt direct proporţionale cu numerele 1, 12 şi 3. Avem:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{12} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{1+12+3} = \frac{320}{16} = 20.$$

De unde: $x = 20$ km; $y = 240$ km şi $z = 60$ km.

Scanned with OKEN Scanner

6.12. 72 kg argilă albă, 6 kg nisip, 3 kg gips și 51 kg apă.

6.13. 2 400 lei, 2 250 lei și 2 850 lei.

6.14. Fie x, y, z, cele trei părți. Avem:

$$\frac{x}{1\frac{1}{2}}=\frac{y}{2\frac{5}{6}}=\frac{z}{2\frac{1}{3}}, \text{ sau } \frac{x}{\frac{3}{2}}=\frac{y}{\frac{17}{6}}=\frac{z}{\frac{7}{3}}, \text{ sau încă: } \frac{x}{\frac{9}{6}}=\frac{y}{\frac{17}{6}}=\frac{z}{\frac{14}{6}}.$$

Șirul de rapoarte egale mai poate fi scris:

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{17}=\frac{z}{14}=\frac{x+y+z}{9+17+14}=\frac{100}{40}=2{,}5.$$

De unde:

$$x=2{,}5\cdot 9=22{,}5;\ y=2{,}5\cdot 17=42{,}5 \text{ și } z=2{,}5\cdot 14=35.$$

Deoarece numărul împărțit este 100, procentele ce revin sînt respectiv 22,5%, 42,5% și 35%.

6.15. Recolta totală de fîn este de:

$$103\frac{11}{12}+93\frac{7}{20}+215\frac{5}{6}=103\frac{55}{60}+93\frac{21}{60}+215\frac{50}{60}=413\frac{1}{10}\,t=413{,}1 \text{ t fîn.}$$

Capacitatea de depozitare a ariei este de: $413{,}1\cdot 0{,}7=289{,}17$ t fîn.
Din noua recoltă se poate depozita pe arie numai $289{,}17-15{,}4=273{,}77$ t fîn.
Cantitatea de fîn depozitat în clăi este de: $413{,}1-273{,}77=139{,}33$ t.
Dacă notăm cu x, y, z, t cantitățile de fîn din cele patru clăi, avem:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2\frac{1}{2}}=\frac{z}{3\frac{1}{7}}=\frac{t}{1\frac{1}{2}} \text{ sau } \frac{x}{28}=\frac{y}{35}=\frac{z}{44}=\frac{t}{21}=\frac{x+y+z+t}{128}=\frac{139{,}33}{128}=\frac{13\,933}{12\,800}.$$

De unde:

$$x=\frac{13\,933\cdot 28}{12\,800}=\frac{97\,531}{3\,200}=30\frac{1\,531}{3\,200}\,t\cong 30{,}478 \text{ t,}$$

$$y=\frac{13\,933\cdot 35}{12\,800}=\frac{97\,531}{2\,560}=38\frac{251}{2\,560}\,t\cong 38{,}098 \text{ t,}$$

$$z=\frac{13\,933\cdot 44}{12\,800}=\frac{153\,263}{3\,200}=47\frac{2\,863}{3\,200}\,t\cong 47{,}895 \text{ t,}$$

$$t=\frac{13\,933\cdot 21}{12\,800}=\frac{292\,593}{12\,800}=22\frac{10\,993}{12\,800}\,t\cong 22{,}859 \text{ t.}$$

6.16. Considerăm egală cu unitatea, munca desfășurată de muncitorul al treilea.

Dacă primul a lucrat de $\frac{3}{4}$ ori mai mult decît al treilea, iar al doilea de 2,4 ori mai mult decît primul, rezultă că al doilea a lucrat de $2{,}4\cdot\frac{3}{4}=\frac{12}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$ ori mai mult decît al treilea.

Scanned with OKEN Scanner

Sumele ce li se cuvin celor trei muncitori sînt proporționale cu numerele $\frac{3}{4}$, $1\frac{4}{5}$ și 1. Avem:

$$\frac{x}{\frac{3}{4}} = \frac{y}{1\frac{4}{5}} = \frac{z}{1} \text{ sau } \frac{x}{15} = \frac{y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{x+y+z}{71} = \frac{426}{71} = 6.$$

De unde:

$$x = 6 \cdot 15 = 90 \text{ lei}; \quad y = 6 \cdot 36 = 216 \text{ lei}; \quad z = 6 \cdot 20 = 120 \text{ lei}.$$

6.17. Notăm cu x, y, z și t cele patru părți. Se pot forma proporțiile: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$; $\frac{y}{z} = \frac{4}{5}$; $\frac{z}{t} = \frac{3}{4}$. Schimbînd mezii între ei obținem:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \quad \frac{y}{4} = \frac{z}{5}; \quad \frac{z}{3} = \frac{t}{4}.$$

Amplificăm proporțiile respectiv prin $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{5}$, avem:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12}, \quad \frac{y}{12} = \frac{z}{15}, \quad \frac{z}{15} = \frac{t}{20}.$$

Cele trei proporții avînd, două cîte două, cîte un raport egal, pot fi scrise sub forma unui șir de rapoarte egale:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{t}{20}.$$

Aplicînd proprietatea șirului de rapoarte egale, găsim: $x = 200$, $y = 300$, $z = 375$ și $t = 500$.

6.18. Primul muncitor primește $5\,200 \cdot \frac{15{,}5}{100} = 5\,200 \cdot \frac{31}{200} = 806$ lei. Din suma rămasă de $5\,200 - 806 = 4\,394$ lei, al doilea primește $4\,394 \cdot \frac{6}{13} = 2\,028$ lei. Suma ce se va împărți celorlalți trei muncitori este $4\,394 - 2\,028 = 2\,366$ lei.

Notînd cu x, y și z sumele ce li se cuvin celorlalți muncitori, avem:

$$\frac{x}{y} = \frac{0{,}5}{0{,}30(5)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{305-30}{900}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{11} = \frac{18}{11};$$

$$\frac{z}{x} = \frac{1{,}2}{4\frac{1}{2}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{2}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{15}.$$

Proporțiile obținute pot fi scrise:

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{11} \text{ și } \frac{x}{15} = \frac{z}{4} \text{ sau } \frac{x}{90} = \frac{y}{55} \text{ și } \frac{x}{90} = \frac{z}{24}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem forma şirul de rapoarte egale:

$$\frac{x}{90}=\frac{y}{55}=\frac{z}{24}=\frac{x+y+z}{90+55+42}=\frac{2\,366}{169}=14,$$

de unde obţinem: $x=1\,260$, $y=770$ şi $z=336$.

Sumele primite de cei cinci muncitori sînt: 806 lei, 2 028 lei, 1 260 lei, 770 lei şi 336 lei.

6.19. Numărul de turaţii este invers proporţional cu diametrul roţii respective. Notînd cu x, y, z numărul de turaţii ale roţilor cu razele de 20 cm, 30 cm şi 40 cm, avem:

$$\frac{x}{\frac{1}{40}}=\frac{400}{\frac{1}{15}};\quad \frac{y}{\frac{1}{60}}=\frac{400}{\frac{1}{15}};\quad \frac{z}{\frac{1}{80}}=\frac{400}{\frac{1}{15}},$$

de unde:

$$x=\frac{1}{40}\cdot 6\,000=150;\quad y=\frac{1}{60}\cdot 6\,000=100;\quad z=\frac{1}{80}\cdot 6\,000=75.$$

6.20. Avem: $\frac{x}{\frac{1}{10}}=\frac{y}{\frac{1}{11}}=\frac{z}{\frac{1}{14}}$, sau:

$$\frac{x}{77}=\frac{y}{70}=\frac{z}{55}=\frac{x+y+z}{202}=\frac{707}{202}=3{,}5.$$

De unde:

$$x=3{,}5\cdot 77=269{,}50 \text{ lei};\quad y=3{,}5\cdot 70=245 \text{ lei},$$

$$z=3{,}5\cdot 55=192{,}50 \text{ lei}.$$

6.21. $\frac{x}{\frac{1}{1\frac{4}{60}}}=\frac{y}{\frac{1}{1\frac{12}{60}}}=\frac{z}{\frac{1}{1\frac{20}{60}}}$;

$$\frac{x}{\frac{15}{16}}=\frac{y}{\frac{5}{6}}=\frac{z}{\frac{3}{4}};\quad \frac{x}{45}=\frac{y}{40}=\frac{z}{36}=\frac{x+y+z}{121}=\frac{726}{121}=6.$$

$x=6\cdot 45=270$ lei; $y=6\cdot 40=240$ lei şi $z=6\cdot 36=216$ lei.

6.22. Al doilea elev a terminat problema în $30\cdot\frac{5}{6}=25$ minute, iar al treilea în $25\cdot\frac{9}{10}=22\frac{1}{2}$ minute. Suma va fi împărţită în părţi invers proporţionale cu numerele 30, 25 şi $22\frac{1}{2}$. Se găseşte: 150 lei, 180 lei şi 200 lei.

Scanned with OKEN Scanner

6.23. Fie S suma de bani care a fost împărțită trimestrial ca premiu celor trei lucrători și x_1, y_1, z_1 și x_2, y_2, z_2 sumele cuvenite fiecăruia în trimestrele I și II. Avem:

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{3} = \frac{z_1}{5} = \frac{x_1 + y_1 + z_1}{2 + 3 + 5} = \frac{S}{10}$$

$$\frac{x_2}{\frac{1}{2}} = \frac{y_2}{\frac{1}{3}} = \frac{z_2}{\frac{1}{5}}; \quad \frac{x_2}{15} = \frac{y_2}{10} = \frac{z_2}{6} = \frac{x_2 + y_2 + z_2}{15 + 10 + 6} = \frac{S}{31}.$$

De unde:

$$x_1 = \frac{1}{5} S, \; y_1 = \frac{3}{10} S, \; z_1 = \frac{1}{2} S \text{ și}$$

$$x_2 = \frac{15}{31} S, \; y_2 = \frac{10}{31} S, \; z_2 = \frac{6}{31} S.$$

Conform enunțului avem:

$$(z_1 + z_2) - (y_1 + y_2) = 165;$$

$$\frac{1}{2} S + \frac{6}{31} S - \frac{3}{10} S - \frac{10}{31} S = 165; \quad \frac{11}{155} S = 165;$$

$$S = 165 \cdot \frac{155}{11} = 2\,325.$$

Atunci:

$$\begin{cases} x_1 = 465 \\ x_2 = 1\,125 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 697,\,50 \\ y_2 = 750 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = 1\,162,50 \\ z_2 = 450. \end{cases}$$

6.24. Fie x, y, z contribuțiile celor trei sate.
Avem:

$$\frac{x}{\frac{152}{1\,600}} = \frac{y}{\frac{110}{2\,500}} = \frac{z}{\frac{128}{3\,000}}, \text{ sau } \frac{x}{\frac{19}{200}} = \frac{y}{\frac{11}{250}} = \frac{z}{\frac{16}{375}};$$

sau încă:

$$\frac{x}{285} = \frac{y}{132} = \frac{z}{128} = \frac{x + y + z}{545} = \frac{6\,540}{545} = 12.$$

De unde:

$$x = 12 \cdot 285 = 3\,420 \text{ lei}; \; y = 12 \cdot 132 = 1\,584 \text{ lei}$$

$$\text{și } z = 12 \cdot 128 = 1\,536 \text{ lei}.$$

6.25. $T = \dfrac{72° \cdot 100 + 90° \cdot 150 + 98° \cdot 250}{100 + 150 + 250} = \left(\dfrac{45\,200}{500}\right)° = 90°,\,4C.$

6.26. $\dfrac{1\,700 \cdot 8\% + 400 \cdot 0\%}{1\,700 + 400} = \dfrac{13\,600}{2\,100}\,\% = 6\,\dfrac{10}{21}\,\% \cong 6{,}48\%.$

Scanned with OKEN Scanner

6.27. Masa aliajului este:

$$M = 500 + 140 + 6{,}25 + 5 = 651{,}25 \text{ kg}.$$

Volumul aliajului este:

$$V = \frac{500}{8{,}8} + \frac{140}{7{,}3} + \frac{6{,}25}{6{,}86} + \frac{5}{11{,}35} \cong 77{,}348 \text{ dm}^3.$$

Densitatea aliajului este:

$$D = \frac{M}{V} = \frac{651{,}25}{77{,}348} \cong 8{,}42.$$

Volumul corpului este:

$$V = \frac{1{,}5}{8{,}42} \cong 0{,}178 \text{ dm}^3.$$

6.28. Notăm cu M, V și d masa, volumul și densitatea aliajului de aluminiu. Densitatea apei este 1, iar cea a amestecului de petrol și apă $\frac{0{,}8 \cdot 8 + 1 \cdot 2}{8 + 2} =$

$= \frac{8{,}4}{10} = 0{,}84.$

Din studiul fizicii se știe că pentru a pluti un corp într-un lichid, trebuie ca masa corpului să fie egală cu masa lichidului dezlocuit de acel corp.

Avem: Condiția de plutire pe apă $M = (V - 10) \cdot 1$, iar pe amestecul de petrol și apă: $M = (V - 5) \cdot 0{,}84$.

Rezultă deci că: $V - 10 = (V - 5) \cdot 0{,}84$.

De unde: $V - 10 = 0{,}84\ V - 4{,}2$; $V - 0{,}84\ V = 10 - 4{,}2$; $0{,}16\ V = 5{,}8$;

$$V = \frac{5{,}8}{0{,}16} = 36{,}25 \text{ cm}^3; \quad M = 36{,}25 - 10 = 26{,}25 \text{ g};$$

$$d = \frac{M}{V} = \frac{26{,}25}{36{,}25} = \frac{21}{29} \simeq 0{,}724.$$

6.29. $M = \frac{m}{T} = \frac{1\,968}{0{,}8} = 2\,460$ g.

6.30. Dacă notăm m_1 și m_2 masele metalului prețios din cele două aliaje și cu M_1 și M_2 masele totale ale aliajelor, putem scrie:

$$\frac{m_1}{M_1} = 0{,}8 \text{ și } \frac{m_2}{M_2} = 0{,}9 \text{ (unde } M_1 = 200 \text{ g și } m_2 = 324 \text{ g)}.$$

Avem:

$$\frac{m_1}{200} = 0{,}8 \text{ și } \frac{324}{M_2} = 0{,}9, \text{ de unde}$$

$$m_1 = 0{,}8 \cdot 200 = 160 \text{ g și } M_2 = \frac{324}{0{,}9} = 360 \text{ g}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Masa totală a noului aliaj este $M_1 + M_2 = 200 + 360 = 560$ g; iar cea a metalului prețios $m_1 + m_2 = 160 + 324 = 484$ g.

Procentul de metal prețios din noul aliaj este $\frac{484}{560} \cdot 100 \simeq 86{,}43\%$.

Titlul noului aliaj este $T = \frac{m_1 + m_2}{M_1 + M_2} = \frac{484}{560} \cong 0{,}8643$.

6.31. Notăm cu M masa fiecăruia dintre ultimele două aliaje. Masele metalului prețios din cele trei aliaje date sînt: $0{,}87 \cdot 200 = 174$ grame, $0{,}88M$ grame și $0{,}79M$ grame, iar greutatea metalului prețios din aliajul obținut:

$$174 + 0{,}88M + 0{,}79M = (1{,}67M + 174) \text{ grame.}$$

Masa totală a aliajului obținut fiind de $2M + 200$ grame, iar densitatea lui de 0,85, putem scrie:

$$0{,}85 \cdot (2M + 200) = 1{,}67M + 174$$

sau

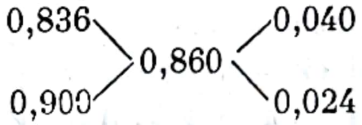
$$1{,}70M + 170 = 1{,}67M + 174;\ 0{,}03M = 4;$$

$$M = \frac{400}{3} = 133\,\frac{1}{3} \text{ grame.}$$

Masa aliajului obținut este:

$$2 \cdot 133\,\frac{1}{3} + 200 = 466\,\frac{2}{3} \text{ grame.}$$

6.32.



$$\frac{x}{y} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3};\quad \frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{5+3} = \frac{5}{8};$$

$$x = 5 \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{8} = 3\,\frac{1}{8} \text{ kg};\ y = 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1\,\frac{7}{8} \text{ kg.}$$

Capitolul VII

7.1. Numărul cel mare este de 4 ori numărul cel mic, plus 10. Suma lor va fi de 5 ori numărul cel mic, plus 10. Dacă de 5 ori numărul cel mic, plus 10 este 100, rezultă că de 5 ori numărul cel mic este 90, iar numărul cel mic 18. Atunci numărul cel mare va fi 82.

7.2. Numărul cel mare de 4 ori numărul cel mic, plus 8. Diferența lor va fi de 3 ori numărul cel mic, plus 8. Dacă de 3 ori numărul cel mic, plus 8 este 290, rezultă că de trei ori numărul cel mic este 282, iar numărul cel mic 94. Atunci numărul cel mare va fi 384.

Scanned with OKEN Scanner

7.3. Pentru scrierea numărului în baza 8, trebuie să grupăm cele 1 967 unităţi ale sale cîte 8, 8^2, 8^3, ...

Avem:

$$1\,967 : 8 = 245 \text{ (rest } 7); \qquad 1\,967 = 245 \cdot 8 + 7;$$
$$245 : 8 = 30 \text{ (rest } 5); \qquad 1\,967 = 30 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 7;$$
$$30 : 8 = 3 \text{ (rest } 6); \qquad 1\,967 = 3 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 7.$$

Deci

$$1\,967_{(10)} = 3\,657_{(8)}.$$

Pentru scrierea numărului în baza 12 se procedează asemănător. Sînt însă necesare 12 cifre. Vom introduce două cifre suplimentare $\alpha = 10$ şi $\beta = 11$.

Avem:

$$1\,967 : 12 = 163 \text{ (rest } 11 = \beta); \qquad 1\,967 = 163 \cdot 12 + \beta;$$
$$163 : 12 = 13 \text{ (rest } 7); \qquad 1\,967 = 13 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12 + \beta;$$
$$13 : 12 = 1 \text{ (rest } 1); \qquad 1\,967 = 1 \cdot 12^3 + 1 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12 + \beta.$$

Deci:

$$1\,967_{(10)} = 117\,\beta_{(12)}, \text{ unde } \beta \text{ reprezintă 11 unităţi.}$$

7.4. Avem $60 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Deci 60 este un produs al următoarelor grupe de cîte 3 factori întregi:

$1 \cdot 2 \cdot 30$; $1 \cdot 4 \cdot 15$; $1 \cdot 6 \cdot 10$; $1 \cdot 3 \cdot 20$; $1 \cdot 5 \cdot 12$; $2 \cdot 6 \cdot 5$; $4 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 10$ şi $2 \cdot 2 \cdot 15$.

Punînd condiţia ca cel mai mare să fie mai mic decît suma celorlalte două obţinem numai grupele 3, 4, 5 şi 2, 5, 6.

7.5. Numărul dat poate fi scris $28\,900 + \overline{xy} = 206 \cdot 140 + 60 + \overline{xy}$. Pentru ca $60 + \overline{xy}$ să se dividă cu 140 trebuie că $x = 8$, $y = 0$.

7.6. Produsul a două numere întregi este tot un număr întreg. Cîtul a două numere întregi este, în general, o fracţie ordinară.

Dacă suma dintre produsul a două numere şi cîtul lor este o fracţie ordinară cu numitorul 6, rezultă că unul dintre numere este 6 sau un multiplu de 6.

Cum suma celor două numere este 13, nu ar fi posibile decît cazurile:

$$a)\ 7 \text{ şi } 6; \quad b)\ 1 \text{ şi } 12.$$

Numai prima pereche de numere satisface condiţiile problemei, deoarece:

$$7 \cdot 6 + \frac{7}{6} = \frac{259}{6}, \quad \text{iar} \quad 1 \cdot 12 + \frac{1}{12} \neq \frac{259}{6}.$$

7.7. Se ştie că produsul dintre c.m.m.m.c. şi c.m.m.d.c. la două numere este egal cu produsul numerelor date.

Notînd cu a şi b numerele date şi cu M şi d c.m.m.m.c. şi respectiv c.m.m.d.c. avem: $M \cdot d = a \cdot b$, sau $M = \frac{ab}{d}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a = d \cdot a'$ şi $b = d \cdot b'$, putem scrie:

$$\frac{a}{b} = \frac{d \cdot a'}{d \cdot b'} = \frac{a'}{b'} = \frac{6}{11}, \text{ de unde } a' = 6 \text{ şi } b' = 11.$$

Atunci, avem: $M = \frac{6d \cdot 11d}{d} = 66d = 1\,386$, de unde $d = \frac{1\,386}{66} = 21$.

În sfîrşit: $a = d \cdot a' = 21 \cdot 6 = 126$ şi

$$b = d \cdot b' = 21 \cdot 11 = 231.$$

7.11. 1) Se observă că fracţiilor date le lipsesc respectiv $\frac{5}{36}$, $\frac{5}{42}$ şi $\frac{5}{43}$ pînă la un întreg. Deoarece $\frac{5}{36} > \frac{5}{42} > \frac{5}{48}$, rezultă că: $\frac{31}{36} < \frac{37}{42} < \frac{43}{48}$.

2) Media aritmetică a fracţiilor date este:

$$M = \frac{\frac{31}{36} + \frac{37}{42} + \frac{43}{48}}{3} = \frac{\frac{868}{1\,008} + \frac{888}{1\,008} + \frac{903}{1\,008}}{3} = \frac{\frac{2\,659}{1\,008}}{3} = \frac{2\,659}{3\,024}.$$

Cele trei fracţii date pot fi scrise: $\frac{2\,604}{3\,024}$, $\frac{2\,664}{3\,024}$, $\frac{2\,709}{3\,024}$.

Media lor aritmetică se intercalează între prima şi a doua. Avem deci:

$$\frac{31}{36} < M < \frac{37}{42} < \frac{43}{48}.$$

7.12. Se notează cu x numărul cu care s-a început calculul şi se obţine:

$$\frac{(3x - 4) \cdot 5 + 8}{7} = 39.$$

Pe baza proprietăţilor operaţiilor se găseşte $x = 19$.

7.13. 64.

7.14. $41\frac{29}{72}$.

7.15. $\{(a, b);\ a \in N,\ b \in N \mid a \cdot b = 576\} = \{(1,576);\ (2,288);\ (3,192);\ (4,144);\ (6,96);\ (8,72);\ (9,64);\ (12,48);\ (16,36);\ (18,32);\ (24,24)\}$.

7.16. $\frac{x + \frac{33}{30}}{x - \frac{17}{30}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x + \frac{11}{10}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow \frac{x + \frac{11}{10}}{\frac{5}{3} \cdot \frac{33}{50}} = \frac{3}{\frac{33}{50}} \Leftrightarrow \frac{x + 1{,}1}{1{,}1} = \frac{50}{11} \Leftrightarrow \frac{x}{1{,}1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{39}{11} \Leftrightarrow x = 3{,}9.$$

7.17. *a*) 120 lei; *b*) 90 lei.

7.18. 2,34 m; 1,56 m; 2,3 m; 1,2 m.

7.19. Se consideră suprafaţa parcelei semănate cu ovăz egală cu unitatea. Se găsesc suprafeţele (în ha): 614; 79; 109 şi 119.

Scanned with OKEN Scanner

7.20. Surplusul de recoltă este de $200 \cdot 100 = 20\,000$ kg porumb și valorează $0{,}90 \cdot 20\,000 = 18\,000$ lei.

Economia de zile este de $5\,370 - 343 = 5\,027$ zile, iar contra-valoarea ei de $32 \cdot 5\,027 = 160\,864$ lei.

Economia totală este de $18\,000 + 160\,864 = 178\,864$ lei.

7.22. Timpul care se scurge de la plecarea unui autocamion pînă la sosirea lui este de

$$\frac{10}{30} + \frac{2}{60} + \frac{10}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{3} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} \text{ ore.}$$

În acest timp escavatorul scoate $60 \cdot \frac{7}{10} = 42$ m³ de pămînt, pentru a cărui evacuare este nevoie de $42 : 3 = 14$ autocamioane.

7.24. *a)* Dacă suprafața cultivată cu secară este cu 18 ha mai mare decît cea cultivată cu orz și în același timp de 3 ori mai mare ca ea, rezultă că cele 18 ha reprezintă dublul suprafeței cultivate cu orz. Cu orz s-a cultivat deci $18 : 2 = 9$ ha, iar cu secară $9 \cdot 3 = 27$ ha.

Cu grîu și ovăz s-au cultivat în total $118\frac{1}{3} - (9 + 27) = 82\frac{1}{3}$ ha.

Știind că suprafața cultivată cu grîu întrece cu $\frac{179}{3} = 59\frac{2}{3}$ ha pe cea cultivată cu ovăz, dublul suprafeței cultivate cu ovăz este $82\frac{1}{3} - 59\frac{2}{3} = 22\frac{2}{3}$ ha.

Suprafața semănată cu ovăz este deci $22\frac{2}{3} : 2 = 11\frac{1}{3}$ ha, iar cea semănată cu grîu $11\frac{1}{3} + 59\frac{2}{3} = 71$ ha.

b) Cu grîu s-a semănat $\frac{71}{118\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$ din întreaga suprafață și s-a recoltat $2\,400 \cdot 71 = 170\,400$ kg de grîu.

7.25. Pînă să fie ajuns din urmă de automobil, omul care merge pe jos face $\frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$ ore, în timp ce automobilul numai $\frac{1}{4}$ ore.

Rezultă că viteza automobilului este de $2\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 10$ ori mai mare decît cea a drumețului.

Pînă să fie ajuns din urmă de automobil, călărețul merge $2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ ore, în timp ce automobilul merge numai $\frac{1}{2}$ ore. Rezultă că viteza automobilului este de $2\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 5$ ori mai mare decît cea a călărețului.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd viteza automobilului egală cu întregul, atunci cea a drumeţului este $\frac{1}{10}$ şi cea a călăreţului $\frac{1}{5}$ din viteza automobilului.

Suma vitezelor lor reprezintă $\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + 1 = 1\frac{3}{10}$ din viteza automobilului.

Vitezele căutate sînt $78 : 1\frac{3}{10} = 60$ km/oră a automobilului; $60 \cdot \frac{1}{5} = 12$ km/oră a călăreţului şi $60 \cdot \frac{1}{10} = 6$ km/oră cea a drumeţului.

7.26. Un kilometru este parcurs la ducere în $\frac{1}{30}$ ore şi la întoarcere în $\frac{1}{20}$ ore. Pentru parcurgerea unui kilometru — dus şi întors — este nevoie de $\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12}$ ore. Rezultă că distanţa de la A la B este de $5 : \frac{1}{12} = 60$ km.

7.27. Viteza biciclistului poate fi scrisă: $8 \text{ m/s} = \frac{8 \cdot 3\,600}{1\,000} \text{ km/h} = 28{,}8 \text{ km/h}$, iar cea a motociclistului $25 \text{ m/s} = \frac{25 \cdot 3600}{1\,000} \text{ km/h} = 90 \text{ km/h}$.

a) Plecînd cu 15 minute înainte, biciclistul ia un avans de $28{,}8 \cdot \frac{1}{4} = 7{,}2$ km, pe care motociclistul îl recuperează în $7{,}2 : (90 - 28{,}8) = 7{,}2 : 61{,}2 = \frac{72}{612} = \frac{2}{17}$ h.

Rezultă că motociclistul va ajunge din urmă pe biciclist la distanţa de $90 \cdot \frac{2}{17} = \frac{180}{17} = 10\frac{10}{17}$ km depărtare de A.

Pînă în B mai rămîn de parcurs $20 - 10\frac{10}{17} = 9\frac{7}{17}$ km, pe care motociclistul îi parcurge în $9\frac{7}{17} : 90 = \frac{160}{17} \cdot \frac{1}{90} = \frac{16}{153}$ h, timp în care biciclistul rămîne în urmă cu $(90 - 28{,}8) \cdot \frac{16}{153} = \frac{306}{5} \cdot \frac{16}{153} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$ km.

b) Pentru parcurgerea distanţei de la A la B, motociclistului îi trebuie $20 : 90 = \frac{2}{9}$ h, timp în care biciclistul parcurge $28{,}8 \cdot \frac{2}{9} = 6{,}4$ km.

Rezultă că în momentul plecării motociclistului, biciclistul trebuie să aibă un avans de $20 - 6{,}4 = 13{,}6$ km. Acest avans îl poate lua în $13{,}6 : 28{,}8 = \frac{136}{288} = \frac{17}{36}$ h de mers.

Pentru a ajunge în B o dată cu biciclistul, motociclistul trebuie să plece din A la ora $8\frac{1}{2} + \frac{17}{36} = 8\frac{35}{36}$ sau la 8 h 58 min 20 s.

7.28. 72 km/oră; la ora 16.

7.29. După 18 min 20 s de la plecarea din oraş; la 11 km de oraş.

Scanned with OKEN Scanner

7.30. Volumul blocului de piatră este $V = 2 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 6$ m³, iar masa lui $M = 6 \cdot 2{,}4 = 14{,}4$ t.

În apă, blocul de piatră cîntăreşte $14{,}4 - 6 = 8{,}4$ t < 10 t. Deci lanţul va rezista.

7.31. 15 120 de bucăţi a cîte 6 lei şi 30 240 de bucăţi a cîte 4 lei.

7.32. 40 m, 10 m.

7.33. Un sfert din numărul muncitorilor rămaşi după repartizarea la sfeclă şi porumb reprezintă $10 + 3 = 13$ muncitori, iar întregul rest $13 \cdot 4 = 52$ muncitori.

Jumătate din restul muncitorilor rămaşi după repartizarea la sfeclă reprezintă $52 + 10 = 62$ de muncitori, iar întregul rest $62 \cdot 2 = 124$ de muncitori.

Jumătate din numărul muncitorilor este $124 + 3 = 127$ de oameni, iar întregul lor număr $127 \cdot 2 = 254$.

7.34. Mergînd în acelaşi sens, trenurile trec unul pe lîngă celălalt cu o viteză egală cu diferenţa vitezelor lor, iar în sensuri contrarii cu o viteză egală cu suma vitezelor. Rezultă că diferenţa vitezelor este:

$$\frac{80 \text{ m} + 60 \text{ m}}{28 \text{ sec}} = 5 \text{ m/sec},$$

iar suma vitezelor:

$$\frac{80 \text{ m} + 60 \text{ m}}{4 \text{ sec}} = 35 \text{ m/sec}.$$

Viteza trenului accelerat este: $\frac{35 + 5}{2} = 20$ (m/sec) sau 72 km/oră, iar cea a trenului de persoane: $\frac{35 - 5}{2} = 15$(m/sec) sau 54 km/oră.

7.35. Restul rămas după premierea primilor doi muncitori este de

$$140 : \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 140 \cdot \frac{5}{4} = 175 \text{ (lei)}.$$

Dacă al doilea ar fi primit numai $\frac{2}{3}$ din primul rest, atunci al doilea rest ar fi fost $175 + 100 = 275$ (lei). Primul rest este $275 : \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 825$ (lei).

Dacă primul ar fi primit numai $\frac{4}{9}$ din întreaga sumă, atunci primul rest ar fi fost $825 + 100 = 925$ (lei). Întreaga sumă este $925 : \left(1 - \frac{4}{9}\right) = 1\,665$ (lei).

Sumele primite de cei trei muncitori sînt 840, 650 lei şi 35 lei.

7.36. După prima zi a mai rămas de arat $\frac{2}{3}$ din teren; după a doua zi $\frac{5}{7}$ din rest sau $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ din întregul teren; după a treia zi $\frac{3}{5}$ din noul rest sau $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5}$ din

Scanned with OKEN Scanner

întregul teren. Cele 3 ha arate la sfîrșitul zilei a patra reprezintă $\frac{1}{5}$ din restul rămas după primele trei zile sau $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{35}$ din întregul teren.

Întregul teren are deci $3:\frac{2}{35}=52\frac{1}{2}$ ha.

7.37. *a*) 540 km; *b*) 54 km/oră, 45 km/oră; *c*) 324 km; 180 km.

7.38. 768 ha; 8 tractoare; 6 ha/zi.

7.39. Dacă în trei ore primul robinet umple $\frac{1}{2}$ din bazin, rezultă că într-o oră umple $\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}$ din bazin, iar în 5 ore $\frac{5}{6}$. Restul de $\frac{1}{6}$ este contribuția robinetului al doilea, care curge timp de 2 ore. Rezultă că al doilea robinet, curgînd singur, ar putea umple bazinul în $2:\frac{1}{6}=12$ ore. Capacitatea bazinului este de $21\cdot 12=252$ litri.

7.41. Dacă două roți dințate, care au z_1 și respectiv z_2 dinți sînt angrenate și dacă n_1 și n_2 sînt numerele de ture pe care acestea le fac într-un anumit timp, atunci întotdeauna avem $n_1z_1=n_2z_2$. În cazul de față, avem:

$$\frac{720}{9}\cdot 60=\frac{n_2}{10}\cdot 48, \text{ de unde } n_2=\frac{720\cdot 60\cdot 10}{9\cdot 48}=1\,000 \text{ ture.}$$

7.42. Notăm cu V viteza bărcii pe o apă stătătoare și cu v viteza cursului de apă. Viteza cu care barca merge în sensul apei este $V+v$, iar cea cu care merge împotriva apei $V-v$.

Pe o anumită distanță, vitezele sînt invers proporționale cu timpii de mers. Avem:

$$\frac{V+v}{V-v}=\frac{18}{13\frac{1}{2}}=\frac{36}{27}=\frac{4}{3}.$$

Formăm o proporție derivată: $\frac{(V+v)+(V-v)}{(V+V)-(V-v)}=\frac{4+3}{4-3}$; $\frac{V}{v}=7$.

Viteza bărcii este deci de 7 ori mai mare decît viteza cursului de apă.

Dacă notăm cu d distanța dintre porturi, timpul în care aceasta este străbătută împotriva apei este $\frac{d}{V-v}=\frac{d}{7v-v}=\frac{d}{6v}$, iar cel în care luntrea este dusă de curent $\frac{d}{v}$. Știind că împotriva curentului apei, barca face 18 ore $\left(\frac{d}{6v}=18\right)$, rezultă că $\frac{d}{v}=108$ ore.

7.43. Se consideră ca întreg numărul de puncte realizate de al patrulea elev și se exprimă numărul de puncte realizate de ceilalți elevi ca fracții ale acestui întreg.

Scanned with OKEN Scanner

După ce se află numărul de puncte realizate de toți elevii se împarte suma acordată, proporțional cu aceste numere. Se obține: 300 lei, 320 lei, 360 lei și 400 lei.

7.44. Se notează cu x, y, z, t suprafețele arate de cele 4 tractoare și se formează proporțiile:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3};\ \frac{y}{4} = \frac{z}{5};\ \frac{z}{6} = \frac{t}{11}.$$

Se amplifică proporțiile respectiv cu $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{5}$;

$$\frac{x}{16} = \frac{y}{24};\ \frac{y}{24} = \frac{z}{30};\ \frac{z}{30} = \frac{t}{55}.$$

Se poate forma un șir de rapoarte egale:

$$\frac{x}{16} = \frac{y}{24} = \frac{z}{30} = \frac{t}{55}.$$

De unde, aplicînd proprietatea șirului de rapoarte egale, găsim:

$x = 16$ ha; $y = 24$ ha; $z = 30$ ha și $t = 55$ ha.

Scanned with OKEN Scanner

Algebra

Capitolul VIII

8.1. *a*) numerele A şi B se mai scriu

$$A = 100a + 76,\ B = 100b + 76,$$

$$AB = (100a + 76)\ (100b + 76) = 100N + 76^2,$$

$$76^2 = 5\,776 = 6\,700 + 76 = 100M + 76.$$

b) $(100a + 25)\ (100b + 25) = 100N + 25^2,$

$$25^2 = 625 = 600 + 25.$$

8.2. $(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1).$

Produsul $k(k + 1)$ este par, deoarece unul din factori este par şi unul impar.

8.3. Se arată că:

$$n(n + 1)\ (n + 2)\ (n + 3) + 2(n + 1)\ (n + 2) = (n + 1)^2\ (n + 2)^2.$$

8.4. Notăm $AB = a$, $BC = b$ şi $CD = d$. Relaţia din enunţ devine:
$(a + b)^2 + (b + c)^2 + 2ac = (a + b + c)^2 + b^2$, care se verifică efectuînd ridicările la pătrat.

8.5. Avem:

$$n(n + 1)\ (n + 2)\ (n + 3) - 2n(n + 3) = n(n + 3)\ [n(n + 3) + 2] - 2n(n + 3) =$$
$$= [n(n + 3)]^2 + 2n(n + 3) - 2n(n + 3) = [n(n + 3)]^2.$$

8.6. Fie $N = \overline{xyz}$. Avem $x + y + z = 10x + y$;

$2y = x + z$. Prin urmare $9x = z$, de unde

$$x = 1 \text{ şi } z = 9, \text{ iar } y = \frac{x + z}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5,\ N = 159.$$

Scanned with OKEN Scanner

8.8. *Indicație.* Notăm $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Avem

$$AC = a + b,\ BD = b + c \text{ și apoi}$$

$$(a + b)^2 + bc + (b + c)c \pm (b + c)^2 + a(a + b) + ab, \text{ sau}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + bc + bc + c^2 = b^2 + c^2 + 2bc + a^2 + ab + ab.$$

8.14. Avem succesiv:

$$E_1 = a(a - c)^2 + b(b - c)^2 - (a - c)\ (b - c)\ (a + b - c) = a(a^2 - 2ac + c^2) +$$

$$+ b(b^2 - 2bc + c^2) - (ab - bc - ac + c^2)\ (a + b - c) = a^3 - 2a^2c + ac^2 +$$

$$+ b^3 - 2b^2c + bc^2 - a^2b + abc + a^2c - ac^2 - ab^2 + b^2c + abc - c^2b + abc - bc^2 -$$

$$- ac^2 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2c - ac^2 - b^2 - b^2c - ab^2 - a^2b.$$

Analog se obțin și celelalte două expresii și deci $E_1 = E_2 = E_3$, ceea ce trebuie arătat.

8.28. Notăm $x + y = A$; $y + z = B$; $z + x = C$.

Expresia devine

$$E = AB(A + B) + AC(A + C) + BC(B + C) + 2ABC,$$

$$E = A^2B + AB^2 + A^2C + AC^2 + BC^2 + 2ABC = A^2(B + C) + A(B^2 + C^2 + 2BC) +$$

$$+ BC(B + C) = (B + C)\ (A^2 + AB + AC + BC) = (A + B)\ (B + C)\ (C + A).$$

Înlocuind pe A, B, C cu expresiile lor avem:

$$E = (x + 2y + z)\ (y + 2x + z)\ (x + 2z + y).$$

8.29. Notăm $7x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 12 = a$ și

$7x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 5x + 12 = b$. Revine să calculăm

$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$, dar $a - b = x^2$, deci expresia dată este x^4.

Capitolul IX

9.4. Ținem seama de identitățile,

$$b^3 + c^3 = (b + c)\ (b^2 - bc + c^2) \text{ și}$$

$$b^3 - c^3 = (b - c)\ (b^2 + bc + c^2).$$

$$E = 2(b^2 + c^2) = 2a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.9. Ţinem seama că

$$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1,\ (x^3+1)(x^6-x^3+1)=x^9+1,$$
$$(x^9+1)(x^{18}-x^9+1)=x^{27}+1.$$

De asemenea avem:

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1;\ (x^3-1)(x^6+x^3+1)=x^9-1;$$
$$(x^9-1)(x^{18}+x^9+1)=x^{27}-1.$$

Expresia devine $\frac{(x^{27}+1)(x^{27}-1)}{x^{27}-1)(x^{27}+1)}=1.$

9.24. Partea I devine:

$$\frac{a+b-\left(\frac{a+b}{ab}\right)}{a+b}=\frac{(a+b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)}{a+b}=1-\frac{1}{ab}.$$

9.28. *Indicaţie.*

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3};\ 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4};\ \ldots\ldots$$

9.29. Notăm $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$. Avem:

$AD=a+b+c$; $BD=b+c$ şi obţinem

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{b}{c}=(b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) \text{ sau}$$

$$ac+bc+c^2+ab=ab+bc+ac+c^2.$$

9.32. Eliminînd numitorii obţinem:

$$(x^2-2xy+y^2)(x+y)+x^2yz+xy^2z+(x^2-2xy+y^2)(xz+yz-x-y)=$$
$$=(x^3z+y^3z).$$

Efectuînd înmulţirile, obţinem în partea I:

$$x^3-2x^2y+xy^2+x^2y-2xy^2+y^3+x^2yz+x^3z-2x^2yz+xy^2z+2xy^2z+y^3z-$$
$$-x^3+2x^2y-xy^2-x^2y+2xy^2-y^2=x^3z+y^3z.$$

9.33. Aplicînd o proprietate cunoscută a şirului de rapoarte egale, obţinem:

$$\frac{a+b}{3a-b}=\ldots=\frac{2(a+b+c+d)}{2(a+b+c+d)}=1.$$

Avem evident

$$\frac{(a+b)^2}{(3a-b)^2}=\frac{(b+c)^2}{(3b-c)^2}=\frac{(c+d)^2}{(3c-d)^2}=\frac{(d+a)^2}{(3d-a)^2}=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicăm aceeaşi proprietate a rapoartelor şi avem:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+da}{5(a^2+b^2+c^2+d^2)-3(ab+bc+cd+da)}=1,$$

sau

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2)=4(ab+bc+cd+da).$$

9.35. Aducem relaţiile date la forma mai simplă

$$ad+a^2=bc+b^2 \tag{1}$$

$$ac+c^2=bd+d^2. \tag{2}$$

Adunînd şi scăzînd aceste relaţii avem:

$$ad+ac+a^2+c^2=bc+bd+b^2+d^2, \tag{3}$$

$$ad-ac+a^2-c^2=bc-bd+b^2-d^2. \tag{4}$$

Relaţia (3) se mai poate scrie:

$$a(c+d)-b(c+d)+(a-b)(a+b)=(d-c)(d+c), \text{ sau}$$

$$(a-b)(a+b+c+d)=(d-c)(d+c).$$

Împărţind prin $(a-b)(d+c)$, obţinem:

$$1+\frac{a+b}{c+d}=\frac{d-c}{a-b} \text{ sau } \frac{a+b}{c+d}+\frac{c-d}{a-b}=-1.$$

Relaţia (4) se mai poate scrie:

$$a(d-c)+b(d-c)+(d-c)(d+c)=(b-a)(b+a)$$

sau

$$(d-c)(a+b+c+d)=(b-a)(b+a).$$

Împărţind prin $(d-c)(b+a)$, avem

$$\frac{c+d}{a+b}+1=\frac{b-a}{d-c} \text{ sau } \frac{a-b}{d-c}-\frac{c+d}{a+b}=1.$$

9.37. Prima relaţie se mai scrie:

$$(ab+bc+ca)m-abc=0.$$

Înmulţim această egalitate cu $m^2(a+b+c)+abc$ şi obţinem:

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)m^3-abc(a+b+c)m^2+$$

$$+abc(ab+bc+ac)m-a^2b^2c^2=0,$$

sau

$$(a+b)(b+c)(c+a)m^3-[(a+b+c)m^2-$$

$$-(ab+bc+ac)m-m^3+abc]abc=0,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$(a+b)(b+c)(c+a)m^3 - abc(a-m)(b-m)(c-m) = 0,$$

de unde relaţia din enunţ.

9.39. *Indicaţie.* Se elimină numitorul şi se exprimă valoarea lui a, care este simetrică în x, y, z, adică nu se schimbă dacă schimbăm două litere oarecare între ele.

9.40. Efectuînd toate calculele, eliminînd numitorii şi simplificînd obţinem că este adevărat. Trebuie însă ţinut seama ca numitorii să nu se anuleze, pentru ca fracţiile să rămînă cu valori finite. De exemplu

$$a \neq b;\ a + 2b \neq 0,\ a + b \neq bc.$$

9.41. Relaţia $\frac{ab}{cd} + \frac{a+b}{c+d}$ se poate scrie:

$$abc + abd = acd + bcd$$

sau

$$ac(b-d) = -bd(a-c). \tag{1}$$

Dar $abc + abd = acd + bcd$ se mai poate descompune astfel:

$$bc(a-d) = -ad(b-c). \tag{2}$$

Înmulţind relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$abc^2(b-d)(a-d) = abd^2(a-c)(b-c)$$

sau

$$c^2(b-d)(a-d) = d^2(a-c)(b-c). \tag{3}$$

Împărţind relaţiile (1) şi (2) obţinem

$$\frac{a(b-d)}{b(a-d)} = \frac{b(a-c)}{a(b-c)}. \tag{4}$$

Relaţiile (3) şi (4) se mai pot scrie:

$$\frac{c^2}{d^2} = \frac{(a-c)(b-c)}{(a-d)(b-d)} \quad (3) \qquad \text{şi} \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)} \quad (4)$$

Adunînd aceste două relaţii obţinem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a-c}{b-d}\left(\frac{b-c}{a-d} + \frac{a-d}{b-c}\right),$$

adică ceea ce trebuie arătat.

9.43. *Indicaţie.* Se elimină numitorii şi se observă că relaţia obţinută nu se schimbă dacă înlocuim pe b cu a şi pe a cu b.

Scanned with OKEN Scanner

9.44. Desfacem parantezele în egalitatea cerută

$$n^2a^2 + n^2b^2 + m^2z^2 + 2x^2ab - 2mnaz - 2mnbz + n^2b^2 + n^2c^2 + mx^2 +$$
$$+ 2n^2bc - 2mnbx - 2mncx + n^2c^2 + n^2a^2 + m^2y^2 + 2n^2ac - 2mncy -$$
$$- 2mnay = m^2x^2 + m^2y^2 + n^2c^2 + 2m^2xy - 2mncx - 2mncy + m^2y^2 +$$
$$+ m^2z^2 + n^2a^2 + 2m^2yz - 2mnay - 2mnaz + n^2z^2 + n^2x^2 + m^2b^2 + 2n^2xz -$$
$$- 2mnbz - 2mnbx,$$

sau:

$$n^2(b^2 + a^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) = m^2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx),$$

sau

$$n^2(a + b + c)^2 = m^2(x + y + z)^2,$$

adică

$$\frac{(a + b + c)^2}{(x + v + z)^2} = \frac{m^2}{x^2},$$

care provine din ridicarea la pătrat a relației de condiție.

9.45. Prima relație se scrie

$$a + y + z + t + x + xyzt = 0, \qquad (1)$$
$$y(1 + xzt) + a + x + z + t = 0,$$

de unde împărțind cu

$$y(a + x + z + t),$$

avem

$$\frac{1 + xzt}{a + x + z + t} + \frac{1}{y} = 0.$$

Relația (1) arată că x, y, z, t se pot schimba una cu alta și relația rămîne aceeași, adică admite simetria față de x, y, z, t. Rezultă că relațiile:

$$\frac{1}{z} + \frac{1 + xyt}{a + x + y + t} = 0 \text{ și } \frac{1}{t} + \frac{1 + xyz}{a + x + y + z} = 0.$$

9.46. Ridicînd prima egalitate la pătrat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 1,$$

însă

$$\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right)\frac{abc}{xyz} = \frac{z}{c} + \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0,$$

deci și a treia egalitate este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

9.49. *Indicații.* Înlocuim pe x, y și z, și apoi aducem la același numitor. Se efectuează înmulțirile și se reduc termenii asemenea obținîndu-se o egalitate evidentă.

9.55. *Indicație.* Se elimină pe rînd numitorii și apoi se constată că se poate schimba a cu b și b cu a.

Capitolul X

10.1. Fie x suma ce o are pionierul. Avem $100 - x = 9x - 100$ sau $200 = 10x$; $x = 20$.

Verificare: $80 + 100 = 9 \cdot 20 = 180$.

10.2. $x = \frac{1}{15}$.

10.3. Fie x vîrsta tatălui.

$x - 3 = 2{,}5\ (x - 33)$, sau $x - 3 = 2{,}5x - 82{,}5$; $1{,}5x = 79{,}5$; $x = 53$ ani.

10.5. Fie x numărul de muncitori din echipă. Avem $3 + (x - 1)5 = 4x + 12$.

$$3 + 5x - 5 = 4x + 12, \text{ de unde } x = 14,$$

$$3 + (14 - 1)5 = 3 + 65 = 68 \text{ m}^3.$$

10.6. Fie x producția din ianuarie. În februarie producția a fost $(1 - 0{,}1)x = 0{,}9x$. În martie, producția a fost $1{,}3 \cdot 0{,}9x = 1{,}17x$, prin urmare producția din martie a fost cu 17% mai mare decît cea din ianuarie.

10.7. Pentru prima relație $x = 1$; pentru a doua relație $x \neq 1$.

10.8. Notăm cu x numărul cerut și avem:

$$x = 7(x - 125) + \frac{x - 125}{4}, \text{ de unde } x = 145.$$

10.9. Ecuațiile sînt echivalente:

$$x = a \neq +1.$$

10.10. Fie x numărul de pagini

$$(x - 165) = 5(x - 225) \text{ sau}$$

$$x - 165 = 5x - 1\,125;\ 4x = 960; \text{ de unde}$$

$$x = 960 : 4 = 240 \text{ pagini.}$$

10.11. Fie $8x$ salariul primului și $11x$ salariul celui de-al doilea. Primul are un salariu de $8x + 120$, iar al doilea de $11x + 150$. Deci:

$$\frac{8x + 120}{11x + 150} = \frac{11}{15}.$$

Scanned with OKEN Scanner

De unde:

$$120x + 1\,800 = 121x + 1\,650 \text{ sau } x = 150.$$

Primul avea deci 1 200 lei și acum are 1 320 lei; al doilea avea 1 650, iar acum are 1 800 lei.

10.12. Fie x numărul căruțelor.

Avem $\frac{x}{x+6} = \frac{10}{25}$, de unde $x = 4$ căruțe.

$$12 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,200,$$

$$82 \cdot 1\,200 = 98\,400 \text{ kg} = 98{,}4 \text{ tone.}$$

10.13. Numărul se mai scrie:

$$N = 100a + 10b + c.$$

Să arătăm că dacă $2b = a + c$, atunci

$1\,000 + 10b + c + c = \mathfrak{M}7$. Avem

$$100a + 5(a + c) + 2c = 105a + 7c = 7 \cdot 15a + 7c = 7(15a + c) = \mathfrak{M}7.$$

10.14. Fie x suma primită de-al treilea.

$$\frac{175x}{100} + \frac{125x}{100} + \frac{100x}{100} = 4x,$$

$$x = \frac{900}{4} = 225 \text{ lei a primit al treilea.}$$

Primul a primit: $\frac{225 \cdot 175}{100} = 393{,}75$ lei.

Al doilea a primit $\frac{225 \cdot 125}{100} = 281{,}25$ lei.

$$225 + 393{,}75 + 281{,}25 = 900 \text{ lei.}$$

10.15. Fie x capacitatea butoiului.

$\frac{x}{2} + 1$ s-a scos prima dată și a rămas $\frac{x}{2} - 1$.

$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 2 = \frac{x+4}{3}$; restul al doilea este:

$$\frac{x}{2} - 1 - \frac{x+4}{3} = \frac{x-14}{6};$$

$$\frac{3}{5}\left(\frac{x-14}{6}\right) + 3 = \frac{x+16}{10}.$$

Restul al treilea este:

$$\frac{x-14}{6} - \frac{x+16}{10} = \frac{x-59}{15},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x-59}{15}\right) + 5 + \frac{x+91}{30}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Restul al patrulea este:

$$\frac{x-59}{15}+\frac{x+91}{30}=\frac{x-209}{30}=12,$$

$$x-209=360;\ x=569 \text{ litri.}$$

10.16. Notăm cu x suma celui de-al patrulea număr. Al treilea este $0{,}68x$, al doilea este $0{,}30(0{,}68x)=0{,}204x$, iar primul este

$$0{,}75x\cdot 0{,}204x=0{,}153x. \text{ Deci}$$

$$x(1+0{,}68+0{,}204+0{,}153)=2\,037 \text{ sau}$$

$$2{,}037x=2\,037;\ x=1\,000 \text{ lei.}$$

Al treilea număr este 680, al doilea 204 şi primul este 153.

Verificare: $153+204+680+1\,000=2\,037$.

10.17. $x=312$.

10.18. Fie x distanţa AB, y viteza motociclistului din A şi z viteza motociclistului din B. Pînă la prima întîlnire în M motociclistul din A

$$\text{a făcut } \frac{x-45}{y} \text{ ore, iar } B \frac{45}{z} \text{ ore, deci } \frac{x-45}{y}=\frac{45}{z}. \qquad (1)$$

După prima întîlnire motociclistul plecat din A a mai făcut $(45+x-15)$ km, deci în timpul de $\frac{30+x}{y}$ ore; iar cel din B a mai mers pînă la a doua întîlnire în N, $x-45+15=x-30$ km, adică în $\frac{x-30}{2}$ ore. Avem $\frac{x+30}{y}=\frac{x-30}{z}=3$ ore.

Rezultă $3y=x+30$; $y=\frac{x+30}{3}$ şi $3z=x-30$; $z=\frac{x-30}{3}$. Înlocuind, obţinem $\frac{x-45}{\frac{x+30}{3}}=\frac{45}{\frac{x-30}{3}}$ sau $\frac{x-45}{x+30}=\frac{45}{x-30}$, de unde $x^2-120x=0$, $x=0$ nu corespunde, deci $x=120$ km; $y=\frac{150}{3}$ km/h şi $z=30$ km/h.

10.19. Fie x şi $x+3$ vitezele celor doi biciclişti.

Avem: $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+3}=1$

sau: $x^2+3x-180=0$.

$x_1=12$, convine, iar $x_2=-15$ km nu convine fiind negativă. Vitezele celor doi biciclişti sînt 15 şi 12 km/oră.

10.20. Fie x cît a citit în prima zi. În a doua zi a citit cu 10% mai mult ca în prima zi, adică $1{,}1x$. În a treia zi a citit $1{,}1x\cdot 1{,}1x=1{,}1^2x=1{,}21x$. Avem:

$$x+1{,}1x+1{,}21x=331 \text{ sau}$$

$$3{,}31x=331, \text{ de unde } x=100 \text{ pagini.}$$

În a doua zi a citit 110 pagini, iar în a treia zi a citit 121 pagini.

Scanned with OKEN Scanner

10.21. Se mai poate scrie:

$$\frac{1\,344-(15+x)19}{17}-38=\frac{96}{8}=12, \text{ sau}$$

$$\frac{1\,344-285-19x}{17}=50;\ 1\,059-19x=850;$$

$$19x=209;\ x=11.$$

10.22. *a)* După prima zi, prima bucată are cu $32-20=12$ m, mai puţin decît a doua. Cei 12 m reprezintă încă $100-85=15\%$ din a doua, după prima zi de vînzare.

Bucata a doua după prima vînzare este deci de $12:\frac{15}{100}=\frac{1\,200}{15}=80$, iar înainte a fost $80+20=100$, prima la fel, fiind egală.

Verificare: $\frac{68}{80}=0{,}85=\frac{85}{100}$,

b) $\frac{68-x}{80-x}=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$ sau $340-5x=240-3x$; $2x=100$; $x=50$ m a vîndut din fiecare a doua zi.

10.23. Aducem la acelaşi numitor fracţiile $\frac{5}{7}$ şi $\frac{3}{5}$ şi avem $\frac{25}{35}$ şi $\frac{21}{35}$,

Dacă $\frac{25}{35}$ din preţul primului covor este egal cu $\frac{21}{35}$ din preţul celui de-al doilea, înseamnă că al doilea covor este mai scump decît primul, raportul dintre costul primului şi celui de-al doilea este $\frac{21}{25}$. Notînd cu x preţul celui de-al doilea, atunci costul primului este $\frac{21}{25}x$. Avem deci:

$$x+\frac{21}{25}x=1\,840, \text{ sau } x\left(1+\frac{21}{25}\right)=\frac{46x}{25}=1\,840,$$

$x=\frac{1\,840\cdot 25}{46}=1\,000$ lei costul celui de-al doilea covor. Costul primului covor este $\frac{21\cdot 1\,000}{25}=840$.

Verificare: $840+1\,000=1\,840$.

10.24. Din primul balot mai rămîne $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ iar din al doilea $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

Aducem la acelaşi numitor fracţiile $\frac{5}{7}$ şi $\frac{4}{5}$, şi anume $\frac{25}{35}$ şi $\frac{28}{35}$.

Fie x numărul de metri al primului balot.

Numărul celui de-al doilea balot este $\frac{25}{28}x$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $x + \frac{25}{28}x = 79\frac{1}{2} = \frac{159}{2}$,

de unde $x = \frac{159 \cdot 28}{53 \cdot 2} = 42$ metri.

Cel de-al doilea a avut $79\frac{1}{2} - 42 = 37\frac{1}{2}$.

10.25. Fie x terenul arat de prima brigadă şi y terenul în ha arat de a doua brigadă. Presupunem $x > y$, adică

$$x = y + 750. \text{ Mai avem}$$

$\frac{2}{5}x = \frac{4}{9}y$ sau $18x = 20y$, deci

$18(y + 75) = 20y$, de unde $y = 6\,750$ ha,

$x = 6\,750 + 750 = 7\,500$ ha.

10.26. Acum $n_1z_1 = n_2z_2 = n_3z_3 = n_4z_4$, unde n este numărul de rotaţii făcute în acelaşi timp, iar z numărúl de dinţi: Deci $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 91$;

$$42n_1 = 56n_2 = 34n_3 = 60n_4.$$

Mai avem $n_2 = \frac{42n_1}{56}$; $n_3 = \frac{42n_1}{34}$ şi

$$n_4 = \frac{42n_1}{60}. \text{ Deci}$$

$$n_1\left(1 + \frac{42}{56} + \frac{42}{34} + \frac{42}{60}\right) = 91 \text{ etc.}$$

10.27. Prima fracţie este egală cu

$$1 - \frac{3}{33\,333\,333\,334} = 1 - x.$$

A doua fracţie este egală cu

$$1 - \frac{2}{22\,222\,222\,223} = 1 - y,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{33\,333\,333\,334}{3} = 11\,111\,111\,111 + \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{y} = \frac{22\,222\,222\,223}{2} = 11\,111\,111\,111 + \frac{1}{2}.$$

Deoarece $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$; $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$, deci $x > y$ şi deci $1 - x < 1 - y$, prin urmare prima fracţie este mai mică decît fracţia a doua.

Procedeul este general şi se poate aplica şi în cazul altor fracţii.

10.28. Notăm cu x, y, z costul cămăşii, cravatei şi costumului şi vom avea:

$$x + y + z = 672;\ x - y = 28;\ \frac{z}{x} = 8.$$

Rezolvăm sistemul şi obţinem $x = 70$, $y = 42$, $z = 560$ lei.

Scanned with OKEN Scanner

10.29. Dezvoltînd numărătorul avem:

$$3x^3 + 3(a^2 + b^2 + c^2)x + 3(a + b + c)x^2 + a^3 + b^3 + c^3 - 3x^3 - 3(ab + bc + ca)x - 3(a + b + c)x^2 - 3abc = 3(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)x + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 3(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)x + (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Ecuaţia devine:

$$\frac{(3x + a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} = 1 \text{ şi rezultă}$$

$$3x + a + b + c = 1, \text{ de unde } x = \frac{1 - a - b - c}{3}.$$

10.30. Numărul $\overline{abc}$ în baza x se va scrie

$$ax^2 + bx + c.$$

Relaţia se va transforma în:

$$\left(\frac{2}{x + 2} + \frac{1}{x}\right)\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2} = 1.$$

Efectuăm şi obţinem:

$$\frac{2x + x + 2}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2} = 1;$$

sau fiindcă $x^2 + 2x = 0$,

$$\frac{3x + 2}{x^2 + 2} = 1;$$

$$3x + 2 = x^2 + 2;$$

$$3x = x^2.$$

Rezultă $x = 0$ şi $x = 3$.
Deci baza de numeraţie cerută este 3.

10.31. Fie x numărul total de ouă. Pentru a-i vinde primului cumpărător $\frac{1}{3}$ din ouă plus $\frac{1}{3}$ de ou, trebuie ca x să fie multiplu de 3 plus 2, pentru că $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ să vîndă un număr întreg de ouă. Deci

$$x = \mathfrak{M}3 + 2.$$

După ce vinde primului îi mai rămîn

$$x - \frac{x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2x - 1}{3}.$$

Vinde celui de-al doilea $\frac{1}{4}\left(\frac{2x - 1}{3}\right) + \frac{3}{4} = \frac{2x + 8}{12} = \frac{x + 4}{6}$, care fiind întreg rezultă că $x + 4$ este multiplu de 6 sau $x = \mathfrak{M}6 - 4$.

Scanned with OKEN Scanner

Primilor doi avînd

$$\frac{x+1}{3}+\frac{x+4}{6}=\frac{3x+6}{6}=\frac{x+2}{2}.$$

După ce a vîndut şi celui de-al doilea îi mai rămîne

$$x-\frac{x+2}{2}=\frac{x-2}{2}.$$

Celui de-al treilea îi vinde

$$\left(\frac{x-2}{2}\right)\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{x}{10}.$$

Celor trei cumpărători a vîndut:

$$\frac{x+2}{2}+\frac{x}{10}=\frac{6x+10}{10}=\frac{3x+5}{5}.$$ Avem

$$\frac{3x+5}{5}+19=x, \text{ sau}$$

$$3x+5+95=5x;\ 2x=100;\ x=50.$$

Verificare: Primului a vîndut

$$\frac{50}{3}+\frac{1}{3}=\frac{51}{3}=17 \text{ ouă};\ 50-17=33.$$

Celui de-al doilea a vîndut

$$\frac{33}{4}+\frac{3}{4}=9 \text{ ouă};\ 33-9=24 \text{ ouă}.$$

Celui de-al treilea îi vinde

$$\frac{24}{5}+\frac{1}{5}=\frac{25}{5}=5 \text{ ouă};\ 24-5=19 \text{ ouă}$$

cît i-a mai rămas.

10.32. Soluţie aritmetică. Dacă scăzînd 10 din primul număr şi adăugînd 10 celuilalt, raportul lor din 5/3 este 3/5, adică numerele obţinute fiecare ia valoarea celuilalt dorită la început. Ele ar fi devenit prin urmare egale dacă în loc de 10 făceau operaţii cu 5 = 10/2, adică scăzînd 5 din primul şi adăugînd 5 la al doilea numerele devin egale. Primul număr a fost la început de 5 ori 5 şi al doilea de 3 ori 5, adică 25 şi 15 au fost cele două numere.

Soluţie algebrică. Putem avea $\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$ şi $\frac{x-10}{y+10}=\frac{3}{5}$ sau $3x-5y=0$ şi $5x-3y=80$ şi rezultă $x=25$ şi $y=15$.

10.33. Fie x, y, z sumele depuse de pionieri:

$$x+y+z=45,$$
$$x+2y+3z=84,$$
$$x+3y+2z=87.$$

Din primele două ecuații prin scădere obținem:

$y + 2z = 39$; iar din ultimele două $y - z = 3$; apoi $3z = 36$;

$z = 12$; $y = 15$ și $x + 15 + 12 = 45$, deci $x = 18$ lei.

10.34. Fie x și y masele specifice cerute. Avem

$\frac{5}{7} = \frac{x}{y}$, sau $7x = 5y$; $6x + 8y = 86$. Înlocuind $y = \frac{7x}{5} = 1{,}4x$

$$6x + 8 \cdot 1{,}4x = 86 \text{ sau } x = \frac{86}{17{,}2} = 5;\ y = 7.$$

10.35. Fie x și y cele două numere.

$$x > y;\ x - \frac{y}{2} = 5\left(y - \frac{y}{2}\right) \text{ sau}$$

$$2x - y = 5y;\ 2x = 6y,$$

de unde $x = 3y$, adică x este de 3 ori mai mare decît y.

10.36. Fie v_1 viteza curentului, pe brațul de 96 km, v_2 viteza curentului pe brațul de 75 km. Din formula $s = vt$, avem $t = \frac{s}{v}$. Formăm sistemul

$$\frac{96}{20 - v_1} + \frac{75}{20 + v_2} = 9 \text{ și } \frac{96}{20 + v_1} + \frac{75}{20 - v_2} = 9.$$

Rezultă $v_1 \cdot v_2 = 20$ km/s, $v_1 = \frac{20}{v_2}$ și înlocuind în una din ecuații obținem $v_1 = 4$ km/oră și $v_2 = 5$ km/oră.

10.37. Fie x suma ce a avut.

$$x - \frac{3x}{13} = \frac{10x}{13};\ \frac{10x}{13} \cdot \frac{4}{11} = \frac{40x}{143},$$

$$\frac{10x}{13} - \frac{40x}{143} = \frac{70x}{143},$$

$$\frac{70x}{143} \cdot \frac{4}{7} = \frac{40x}{143};\ \frac{70x}{143} - \frac{40x}{143} = \frac{30x}{143};\ \frac{30x}{143} = \frac{3x}{13} - 6,$$

de unde $x = 286$ lei.

Prima dată a cheltuit $\frac{3 \cdot 286}{13} = 66$ lei.

A doua oară $286 \cdot \frac{40}{143} = 80$ lei.

A treia oară $286 \cdot \frac{40}{143} = 80$ lei.

Verificare: $66 + 80 + 80 = 226$;

$$286 - 226 = 60;\ 66 - 6 = 60.$$

10.38. Suma a fost 27 000 lei.

Scanned with OKEN Scanner

10.39. Fie x și y normele celor două echipe.

$1{,}2x + 1{,}3y = 226$ și

$1{,}3x + 1{,}2y = 224$, rezultă din adunare

$2{,}5(x + y) = 450$ sau $x + y = \frac{450}{2{,}5} = 180$,

$1{,}2x + 1{,}2y = 180 \cdot 1{,}2 = 216$ scăzînd din egalitatea a doua obținem

$0{,}1x = 224 - 216 = 8$; $x = 80$ tone,

$y = 180 - 80 = 100$ tone cărbuni.

10.40. Fie x și y dimensiunile

$$(1 + 0{,}12)x \cdot (1 - 0{,}12)y = 0{,}9856xy,$$

$$xy - 0{,}9856xy = 0{,}0144\ xy = 288\ \text{m}^2,$$

$$xy = \frac{288}{0{,}0144} = \frac{2\,880\,000}{144} = 20\,000\ \text{m}^2 = 2\ \text{ha}.$$

10.41. $25 \cdot 40 = 7 \cdot 30 + 15x + 50y$, și $x + y + 7 = 25$,

$15x + 50y = 790$; $x + y = 18$;

$15x + 15y = 270$; $35y = 520$;

$y \approx 14{,}857$; $x = 18 - 14{,}86 = 3{,}14$ litri.

10.42. Fie x producția realizată în anul trecut, y producția planificată pentru anul curent, iar z producția realizată în anul curent. Avem:

$$z - y = 1\,000\,000;\ y = 1{,}05\ x \text{ și } z = 1{,}15\ x.$$

Obținem

$1{,}15x - 1{,}05x = 1\,000\,000$ sau

$0{,}10x = 1\,000\,000$; $x = 10\,000\,000$, deci

$$z = \frac{115}{100} \cdot 10\,000\,000 = 11\,500\,000 \text{ lei}.$$

10.43. Fie x cantitatea de aliaj cu titlul de 0,836, y cantitatea de aliaj cu titlul de 0,900. Avem:

$x + y = 5$ și $0{,}836 + 0{,}900y = 5 \cdot 0{,}860$;

$x = 5 - y$; $0{,}836(5 - y) + 0{,}900y = 4{,}300$, sau

$4{,}118 - 0{,}836y + 0{,}900y = 4{,}300$;

$64y = 120$, de unde $x = 3{,}125$ kg și

$y = 5 - 3{,}125 = 1{,}875$ kg.

Scanned with OKEN Scanner

10.44. Fie x şi y părţile cît au cele două persoane: Avem:

$$x + y = 200 : \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{6}\right) = y + \frac{x}{6},$$

$$\frac{15x}{12} = y + \frac{x}{6};\ y = \frac{5x}{12} - \frac{x}{6} = \frac{3x}{12} = \frac{x}{4},$$

$$x + y = x + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4} = 200,$$

$$x = 200 : \frac{5}{4} = 160;\ y = 40 \text{ lei}.$$

10.45. Fie x şi y cantităţile normelor celor două schimburi. Avem:

$$\frac{25x}{100} = \frac{20y}{100} \text{ sau } \frac{x}{4} = \frac{y}{5};\ x = \frac{4y}{5};$$

$$y - x = 2\,560;\ y - \frac{4y}{5} = \frac{y}{5} = 2\,560;$$

$$y = 2\,560 \cdot 5 = 12\,800;\ 12\,800 : 2 = 6\,400.$$

Pe o oră va scoate $6\,400 : 8 = 800$ kg.

10.46. Reducerea pentru ambele cărţi este

$$30 - 26{,}40 = 3{,}60 \text{ lei}.$$

Formăm sistemul $x + y = 30$,

$$\frac{10x}{100} + \frac{15y}{100} = 3{,}60 \text{ sau } 10x + 15y = 360,$$

$$10x + 10y = 300;\ 5y = 60;\ y = 12 \text{ lei},$$

$$x = 30 - 12 = 18 \text{ lei}.$$

10.48. $300 \cdot 0{,}9 = 270;\ x + y = 300;$

$$0{,}920x + 0{,}86y = 270;$$

$$0{,}860x + 0{,}86y = 258;$$

$$0{,}060x = 12;\ x = \frac{12}{0{,}06} = \frac{1\,200}{6} = 200.$$

Deci 200 g din aliajul cu titlul de 0,920 şi 100 g din al doilea aliaj.

10.49. Fie x, y, z numărul cărţilor de literatură tehnică, politică şi beletristică.

$$y = z;\ x = 0{,}9y;\ x + y + z = 2{,}9y;$$

$$y = \frac{29\,000}{2{,}9} = 10\,000;\ z = 10\,000 \text{ şi } x = 9\,000.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.50. Fie x preţul sticlei de un litru, y preţul sticlei de 1/2 litru şi z preţul unui litru de spirt. Avem:

$$x + z = 51{,}75;\ \frac{z}{2} + y = 26{,}25;$$

$2y = 1\frac{3}{7}x$. Sistemul se mai scrie:

$$x + z = 51{,}75;\ 2y + z = 52{,}50;\ 10x - 14y = 0;$$

$$x = 1{,}75 \text{ lei};\ y = 1{,}25 \text{ lei};\ z = 50 \text{ lei}.$$

10.51. Avem $x + y + z = 91$,

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}y = \frac{2}{3}z, \text{ sau } 2x = 3y = 4z,$$

$$y = \frac{2x}{3};\ z = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2},$$

$$x + y + z = x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{13x}{6} = 91,$$

$$x = \frac{91 \cdot 6}{13} = 42;\ y = 28;\ z = 21.$$

10.52. Notăm cu x, y, z, u şi v numărul cangurilor, vulpilor, şerpilor, tigrilor şi urangutanilor. Avem ecuaţiile:

$$x + y + z + u + v = 37 \quad (1)$$

$$2(x + v) + 4(y + u) = 86 \quad (2)$$

$$x + y + 2z + u + v = 44 \quad (3)$$

$$x = y + u \quad (4)$$

$$z = u + v \quad (5)$$

Scăzînd (1) din (3) avem $z = 7$.
Substituind pe (4) în (1) şi (2), obţinem:

$$2x + v = 30 \text{ şi } 3x + v = 43, \text{ de unde } x = 13;\ v = 4.$$

Din (5) $u = z - v = 7 - 4 = 3$.

Din (4) $y = x - u = 13 - 3 = 10$.

Deci $x = 13$, $y = 10$, $z = 7$, $u = 3$ şi $v = 4$.

10.53. Fie x şi y numărul elevilor din cele două clase.
Avem $x + y = 64$.

$$x - 3 = y + 3 + 2;\ x = y + 8;$$

$$2y + 8 = 64;\ y = 28;\ x = 36.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.54. Avem $x + y = 200$; $12x + 96y = 200 \cdot 37{,}2$;
$12x + 19\,200 - 96x = 7\,440$;

$$84x = 11\,760;\ x = 11\,760 : 84 = 140 \text{ litri};$$

$$y = 200 - 140 = 60 \text{ litri}.$$

10.55. $x + y = 250$; $y = 250 - x$; $4x + 70y = 250 \cdot 38 = 9\,500$;
$4x + 70(250 - x) = 9\,500$; $4x + 17\,500 - 70x = 9\,500$, sau $66x = 8\,000$

$$x = \frac{4\,000}{33} \text{ kg}.$$

10.60. Inegalitatea devine succesiv:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{bc} < 3 + \frac{ab + b^2 + ac + c^2}{bc},$$

$$a^2 + ac + ab + bc < 3bc + ab + b^2 + ac + c^2,$$

$$a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0,$$

$$a^2 - (b + c)^2 < 0,$$

$$(a - b - c)(a + b + c) < 0.$$

Inegalitatea este evidentă, factorii avînd semne contrare: $a - b - c < 0$, căci: $a < b + c$ în orice triunghi, iar $a + b + c > 0$, căci fiecare termen al sumei este pozitiv. Inegalitatea dată este deci adevărată.

10.61. Avem succesiv:

$$\frac{\dfrac{1 - ax}{ax - 1}}{x} + \frac{\dfrac{1 + b(1+x)}{b(1+x) + 1}}{1 + x} = -x + 1 + x = 1,$$

$$\frac{\dfrac{1 + b(1+x)}{b(1+x) + 1}}{1 + x} - \frac{\dfrac{1 - b(1-x)}{b(1-x) - 1}}{1 - x} = 1 + x + 1 - x = 2.$$

10.63. Rezolvăm pe rînd cele două ecuații:

$$\frac{\dfrac{1}{a+1}}{ax} + \frac{\dfrac{1}{a+1}}{x} = a;\ \frac{ax}{a+1} + \frac{x}{a+x} = a;\ \frac{x(a+1)}{a+1} = a,$$

de unde $x = a$, cînd $a \neq -1$.

$$\frac{\dfrac{1}{x+1}}{ax} + \frac{\dfrac{1}{1+x}}{a} = x;\ \frac{ax}{x+1} + \frac{a}{x+1} = x;\ \frac{a(x+1)}{x+1} = x,$$

de unde $x \neq -1$, adică $x = a$ cînd $a \neq -1$.

10.66. Pentru o piesă de primul tip se folosesc 20 kg fier și 10 kg cupru, iar pentru o piesă de tipul doi 10 kg fier și 20 kg cupru. Fără să ținem seama de calitatea pieselor vom găsi cantitativ numărul maxim de piese ce se pot face din-

Scanned with OKEN Scanner

tr-o cantitate de 8 000 + 9 000 = 17 000 kg metal (ţinem seama că pentru o piesă se folosesc 30 kg metal).

$$17\,000 : 30 = 566,(6).$$

Putem forma următorul sistem de inecuaţie (notăm cu x numărul pieselor de primul tip şi cu y numărul pieselor de tipul al II-lea):

$$20x + 10y \leqslant 8\,000;\ 10x + 20y \leqslant 9\,000 \text{ sau}$$

$2x + y \leqslant 800;\ x + 2y \leqslant 900$, combinînd pe rînd aceste ecuaţii cu inegalitatea $x + y \leqslant 566,(6)$ aflăm $x \leqslant 233,(3)$ piese, $y \leqslant 333,(3)$ piese.

Ţinînd seama că este nevoie de un număr întreg de piese, numărul maxim de piese va fi respectiv 233 piese de tipul I; 333 piese de tipul al II-lea.

Deci numărul maxim de piese turnate zilnic este: 233 + 333 = 566 piese.

10.67. Numărul 38 054 împărţit la 31 dă restul 17. Deoarece x reprezintă cifra sutelor, trebuie ca $100x + 17$ să se dividă cu 31, sau $7x + 17$ să se dividă cu 31.

Dacă $7x + 17 = 31$, avem $x = 2$, iar dacă $7x + 17 = 62$, avem $7x = 45$, care nu are soluţie întreagă. Pentru $7x + 17 = 93$ avem $7x = 76$, de unde $x > 10$ nu convine. Numărul căutat este 38 254.

10.68. Soluţie aritmetică. De pe cele 120 ha arate în primăvară, s-a obţinut mai puţin decît de pe o suprafaţă egală arată în toamnă, cu:

$$820 \text{ kg} \cdot 120 = 98\,400 \text{ kg porumb boabe.}$$

Producţia medie pe întreaga gospodărie este mai mică decît producţia medie de pe suprafaţa arată în toamnă cu:

$$98\,400 \text{ kg} : 656 = 150 \text{ kg la hectar.}$$

Producţia medie de pe suprafaţa arată în toamnă este:

$$3\,100 \text{ kg} + 150 \text{ kg} = 3\,250 \text{ kg porumb boabe la hectar.}$$

Producţia medie de pe suprafaţa arată în primăvară este:

$$3\,250 \text{ kg} - 820 \text{ kg} = 2\,430 \text{ kg porumb boabe la hectar.}$$

Creşterea producţiei medii la hectar este de:

$$\frac{820}{2\,430} \cdot 100 = \frac{8\,200}{243} = 33,74\%.$$

Soluţie algebrică. Fie x producţia medie obţinută de pe terenul arat în primăvară, exprimată în kg la hectar. Producţia medie obţinută de pe terenul arat în toamnă este de $(x + 820)$ kg la hectar.

Producţia obţinută de pe cele 120 ha arate în primăvară este de $120x$ kg, iar cea obţinută de pe cele 656 − 120 = 536 ha arate în toamnă, $536(x + 820)$ kg.

Ecuaţia problemei este:

$$120x + 536(x + 820) = 656 \cdot 3\,100;$$

Scanned with OKEN Scanner

pe care rezolvînd-o, găsim:

$$120x + 536x + 439\,520 = 2\,033\,600,$$

$$656x = 1\,594\,080;\ x = \frac{1\,594\,080}{656} = 2\,430.$$

Creşterea producţiei medii la hectar este deci de:

$$\frac{820}{2\,430} \cdot 100 = \frac{8\,200}{243} = 33{,}74\%.$$

10.69. Să notăm cu x suprafaţa cultivată cu grîu, exprimată în hectare şi cu y producţia de grîu la hectar, exprimată în kilograme. Atunci suprafaţa cultivată cu porumb este de $x - 1\,238$ hectare, iar producţia medie de porumb boabe de $65/38\ y$ kg la hectar.

Cunoscînd că suprafaţa cultivată cu grîu şi porumb este de 57 910 ha, putem scrie:

$$x + x - 1\,238 = 57\,910,$$

de unde

$$2x = 59\,148;\ x = 29\,574.$$

Suprafaţa cultivată cu grîu a fost de 29 574 ha, iar cea cultivată cu porumb de $29\,574 - 1\,238 = 28\,336$ ha.

Cunoscînd că producţia totală de grîu şi porumb boabe a fost de 148 282,6 tone, putem scrie ecuaţia:

$$29\,574y + 28\,336 \cdot \frac{65}{38} y = 148\,282\,600,$$

pe care o rezolvăm:

$$561\,906y + 920\,920y = 148\,282\,600 \cdot 19,$$

$$1\,482\,826y = 148\,282\,600 \cdot 19;\ y = 1\,900.$$

Producţia medie de grîu la hectar a fost de 1 900 kg, iar cea de porumb boabe de $\frac{65}{38} \cdot 1\,900 = 3\,250$ kg.

10.70. Facem următoarele notaţii: x numărul absolvenţilor care lucrează în întreprindere; y = numărul fruntaşilor în producţie şi z = numărul inovatorilor.

Dacă 7/8 dintre absolvenţii care lucrează în întreprindere $\left(\frac{7}{8}x\right)$ sînt fruntaşi în producţie şi inovatori, rezultă că putem scrie:

$$y + z = \frac{7}{8}x. \qquad (1)$$

Dacă numărul fruntaşilor în producţie (y) întrece pe cel al inovatorilor (z) cu jumătate din numărul total de absolvenţi care lucrează în întreprindere $\left(\frac{1}{2}x\right)$, putem scrie:

$$y - z = \frac{x}{2}. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă numărul inovatorilor (z) este cu 2 mai mic decît cincimea numărului de absolvenţi $\left(\frac{1}{5}x\right)$, putem scrie:

$$z + 2 = \frac{1}{5}x. \qquad (3)$$

Cu ecuaţiile (1), (2) şi (3) formăm un sistem de ecuaţii, pe care le rezolvăm

$$y + z = \frac{7}{8}x;\quad y - z = \frac{1}{2}x;\quad z + 2 = \frac{1}{5}x.$$

Adunînd primele două ecuaţii, membru cu membru, obţinem:

$$2y = \frac{11}{8}x, \text{ de unde } y = \frac{11}{16}x.$$

Din ecuaţia a treia, scoatem pe z în funcţie de x:

$$z = \frac{1}{5}x - 2.$$

Înlocuind în ecuaţia (1) pe y şi z prin expresiile lor în funcţie de x, obţinem ecuaţia:

$$\frac{11}{16}x + \frac{1}{5}x - 2 = \frac{7}{8}x;\ 55x + 16x - 70x = 160;\ x = 160;$$

$$y = \frac{11}{16}\cdot 160 = 110;$$

$$z = \frac{1}{5}\cdot 160 - 2 = 30.$$

În întreprindere lucrează 160 dintre absolvenţii şcolii, 110 sînt fruntaşi în producţie şi 30 inovatori.

10.71. Să notăm cu x şi y producţiile de cherestea şi respectiv lemn rotund, realizate peste plan, în cursul primului trimestru al anului 1965.

Enunţul problemei conduce la formarea ecuaţiilor:

$$x + y = 2\,778;$$
$$2x - y = 99.$$

Să rezolvăm sistemul. Adunăm ecuaţiile membru cu membru:

$$x + y = 2\,778;\ 2x - y = 99;\ x = \frac{2\,877}{3};\ x = 959.$$

Din prima ecuaţie scoatem:

$$y = 2\,778 - x,$$

în care substituim pe x prin valoarea deja găsită.

$$y = 2\,778 - 959;\ y = 1\,819.$$

Am aflat depăşirile de producţie; au fost de 959 m³ la cherestea şi 1 819 m³ la lemn rotund.

Scanned with OKEN Scanner

Verificare: Producţia peste plan la cherestea şi lemn rotund trebuie să fie de 2 778 m³.

$$959 + 1\,819 = 2\,778.$$

Pornind de la depăşirea înregistrată la lemn rotund, urmărind datele enunţului, să vedem dacă obţinem acelaşi rezultat pentru depăşirea la cherestea:

$$1\,819 + 99 = 1\,918;\ 1\,918 : 2 = 959.$$

10.72. Să notăm cu x şi y depăşirile de producţie pe primul semestru al anului 1965, respectiv la ciment şi clincher, exprimate în tone.

Dacă producţia semestrială, peste plan, de ciment şi clincher este de 19 636 tone, putem scrie:

$$x + y = 19\,636. \qquad (1)$$

Depăşirea medie lunară a planului de producţie la clincher este de $y/6$. Aceasta fiind cu 596 tone mai mică decît întreaga depăşire semestrială la ciment, putem scrie:

$$x - \frac{y}{6} = 596. \qquad (2)$$

Ecuaţiile (1) şi (2) formează sistemul problemei date:

$$x + y = 19\,639;\ x - \frac{y}{6} = 596.$$

Sistemul mai poate fi scris:

$$x + y = 19\,636;\ 6x - y = 3\,576.$$

Adunăm ecuaţiile membru cu membru:

$$7x = 23\,212.$$

De unde:

$$x = \frac{23\,212}{7};\ x = 3\,316.$$

Din prima ecuaţie scoatem:

$$y = 19\,636 - x;\ y = 19\,636 - 3\,316;\ y = 16\,320.$$

Am aflat că depăşirile semestriale ale planului de producţie au fost de 3 316 tone la ciment şi 16 320 tone la clincher.

Verificare: Producţia peste plan la ciment şi clincher trebuie să fie de 19 636 tone:

$$3\,316 + 16\,320 = 19\,636.$$

Depăşirea lunară a planului de clincher poate fi obţinută în două moduri:

$$\frac{16\,320}{6} = 2\,720;\ 3\,316 - 596 = 2\,720.$$

10.73. Prima soluţie. Fie x numărul de apartamente date în folosinţă în primul semestru şi y numărul celor din al doilea semestru.

Dacă în semestrul al doilea s-au dat în folosinţă cu 134 apartamente mai mult decît în primul semestru, rezultă că:

$$y - x = 154. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă 1/8 din numărul apartamentelor date în folosinţă în semestrul II întrece cu 2 şesimea numărului de apartamente date în folosinţă în primul semestru, rezultă că:

$$\frac{y}{8} - \frac{x}{6} = 2. \qquad (2)$$

Rezolvăm sistemul format cu ecuaţiile (1) şi (2)

$$y - x = 154;\ \frac{y}{8} - \frac{x}{6} = 2;$$

$$\begin{array}{l} y - x = 154 \mid 3 \\ 3y - 4x = 48 \mid -1 \text{ sau} \\ 3y - 3x = 462 \\ \underline{3y + 4x = -48} \\ x = 414 \end{array}$$

$$y = x + 154;\ y = 414 + 154;\ y = 568.$$

În întregul an 1965 au fost date în folosinţă, un număr de $414 + 568 = 982$ apartamente.

Soluţia a II-a. Fie x numărul de apartamente date în folosinţă în primul semestru. Atunci, numărul de apartamente date în folosinţă în semestrul al doilea este $x + 154$.

O şesime din numărul de apartamente date în folosinţă în primul semestru este $\frac{x}{6}$, iar o optime din cel al apartamentelor date în folosinţă în semestrul al doilea este $\frac{x + 154}{8}$.

Ecuaţia problemei este:

$$\frac{x + 154}{8} - 2 = \frac{x}{6}.$$

Rezolvăm ecuaţia:

$$3x + 462 - 48 = 4x;\ x = 414.$$

Am aflat că în primul semestru s-au dat în folosinţă 414 apartamente, iar în al doilea semestru $414 + 154 = 568$ apartamente.

În total, în anul 1965, în acest oraş s-au dat în folosinţă $414 + 568 = 982$ apartamente.

Soluţia a III-a. Notăm cu x numărul de apartamente date în folosinţă în anul 1965. Din enunţul problemei rezultă că în primul semestru au fost date în folosinţă

$$\frac{x - 154}{2} = \frac{x}{2} - 77 \text{ apartamente,}$$

iar în semestrul al doilea:

$$\frac{x + 154}{2} = \frac{x}{2} + 77.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația problemei este:

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{x}{2}+77\right)-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{2}-77\right)=2.$$

Pe care rezolvînd-o obținem:

$$\frac{x}{16}+\frac{77}{8}+\frac{x}{12}+\frac{77}{6}=2.$$

$$3x+462+616=96,$$

$$x=982.$$

10.74. Prima soluție. Să notăm cu x numărul de manuale care s-au difuzat elevilor din clasele IX—XI. Atunci numărul de manuale distribuite elevilor din clasele I—VIII, exprimat în funcție de x, este

$$3x+4\,400\,000.$$

Ecuația problemei este:

$$x+3x+4\,400\,000=22\,000\,000$$

sau

$$4x=17\,600\,000.$$

Rădăcina ecuației este

$$x=\frac{17\,600\,000}{4}=4\,400\,000.$$

Rezultă deci că elevilor din clasele IX—XI li s-au distribuit 4 400 000 manuale, iar elevilor din clasele I—VIII, 17 600 000 manuale.

Procentual acest număr reprezintă:

$$\frac{17\,600\,000\cdot 100}{22\,000\,000}=80\%.$$

Rezultă de asemenea că 80% dintre manualele școlare au fost distribuite claselor I—VIII.

Soluția a II-a. Fie x numărul de manuale care s-au distribuit elevilor din clasele I—VIII. Atunci numărul de manuale care s-au difuzat elevilor din clasele IX—XI este:

$$\frac{x-4\,400\,000}{3}.$$

Ecuația problemei este:

$$x+\frac{x-4\,400\,000}{3}=22\,000\,000.$$

Rezolvînd ecuația găsim:

$$3x+x-4\,400\,000=66\,000\,000;$$

$$4x=70\,400\,000;$$

$$x=\frac{70\,400\,000}{4}=17\,600\,000.$$

Rezultă deci că s-au distribuit elevilor din clasele I—VIII, un număr de 17 600 000 manuale.

Rezolvarea se continuă ca la prima soluție.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XI

11.1. Fie D deîmpărțitul, I împărțitorul, C câtul și R restul. Avem $D - R = I \cdot C$ sau

$$D + I - R = I \cdot C + I = I(C + I);$$

$$555 - 11 = I(31 + 1); \text{ deci } I = \frac{544}{32} = 17;$$

$$D = IC + R = 17 \cdot 31 + 11 = 538. \text{ Deci}$$

$$D = 538,\ I = 17,\ C = 31 \text{ și } R = 11.$$

11.3. Dacă notăm cu n numărul din mijloc (al treilea), atunci cele 5 numere pot fi scrise:

$$n - 2,\ n - 1,\ n,\ n + 1,\ n + 2.$$

Fie S suma pătratelor celor 5 numere consecutive. Vom avea:

$$S = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 - 4n + 4 + n^2 - $$
$$- 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2) = \mathfrak{M}5.$$

11.4. Avem formula $S = vt$,

$8{,}1 = vt$. Fie x distanța cerută. Avem

$$\frac{x - 8{,}1}{v} = \frac{x}{2v}, \text{ sau } 10x - 81 = 5x;$$

$x = 10{,}125$ km.

11.8. Avem:

$$\frac{(a-b)^3 + 3(a-b)^2 b + 3(d-b)b^2 + b^3}{(a+b)^3 - 3(a+b)^2 a + 3(a+b)a^2 - a^3} = \frac{[(a-b)+b]^3}{[(a+b)-a]^3} = \frac{a^3}{b^3}.$$

11.9. Fie x prețul unui curcan. Prețul unei curci este $\frac{3x}{4} - 3$.

Prețul unei găini este $2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3x}{4} - 3\right)$.

Avem ecuația:

$$5\left[2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3x}{4} - 3\right)\right] + 3\left(\frac{3x}{4} - 3\right) + 2x = 436;$$

$$5\left[\left(2 + \frac{x}{4} - 1\right)\right] + \frac{9x}{4} - 9 + 2x = 436;$$

$$5(4 + x) + 17x - 36 = 1\,744;\ 22x = 1\,760;$$

$$x = 80 \text{ lei}$$

prețul unei curci este 57, iar prețul unei găini este 21 lei.

Verificare: $5 \cdot 21 + 3 \cdot 57 + 2 \cdot 80 = 105 + 171 + 160 = 436.$

Scanned with OKEN Scanner

11.10. Toate numerele fiind pozitive putem ridica la pătrat și egalitatea se menține.

$4b^2 = a^2 + c^2 + 2ac$; înlocuind pe b^2 cu ac, avem:

$$4ac = a^2 + c^2 + 2ac \text{ sau } a^2 + c^2 - 2ac = 0,$$

$$(a - c)^2 = 0, \text{ deci } a - c = 0, \ a = c.$$

11.12. Notăm $x = mt$; $y = nt$; $z = pt$ și avem

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} = \frac{1}{t^2} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{(m^2 + n^2 + p^2)t^2} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

11.15. Fie x ultimul rest. Avem

$$20 + 30 + \frac{x}{3} = x \text{ sau } x = 60 \text{ lei},$$

$$\frac{y}{3} + 60 + 60 = y, \text{ deci } y = 180 \text{ lei}$$

a avut cînd a intrat în al doilea magazin. Fie z suma inițială

$$180 + 90 + \frac{z}{3} = z; \ \frac{2z}{3} = 270; \ z = 405.$$

Verificare: Prima cheltuială este

$$405 : 3 + 90 = 225; \ 405 - 225 = 180 \text{ lei}.$$

A doua cheltuială:

$$180 : 3 + 60 = 120 \text{ lei}; \ 180 - 120 = 60 \text{ lei}.$$

A treia cheltuială:

$$60 : 3 + 20 = 40 \text{ lei}; \ 60 - 40 = 20 \text{ cît a mai rămas},$$

deci s-a verificat.

11.19. Notăm cu x distanța AB, cu v_1 și v_2 vitezele celor doi bicicliști. Avem:

$$5v_1 = (x - 5)v_2 \text{ și } (x + 3)v_1 = (2x - 3)v_2;$$

de unde, prin împărțire, obținem:

$$\frac{5}{x + 3} = \frac{x - 5}{2x - 3}, \text{ sau } 10x - 15 = x^2 - 2x - 15,$$

de unde

$$x^2 = 12x, \text{ deci } x = 12 \text{ km}, \text{ fiindcă } x \neq 0.$$

11.20. $x = 25$

11.21. Notăm cu S lungimea drumului, v viteza cerută și t timpul în care s-a străbătut tot drumul. Avem:

$$S = vt = v\left(\frac{S}{3} : 36 + \frac{S}{4} : 45 + \left(S - \frac{S}{3} - \frac{S}{4}\right) : 18\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$S = vS\left(\frac{36}{3}+\frac{45}{4}+18-\frac{18}{3}-\frac{18}{4}\right)= vS\,\frac{\frac{4}{36}+\frac{3}{45}+\frac{12-4-3}{18}}{12}=$$

$$= \frac{vS}{12}\left(\frac{20+12+50}{180}\right)=\frac{82vS}{12\cdot 180}=S.$$

Deci

$$v=\frac{12\cdot 180}{82}=\frac{1\,080}{41}=26{,}(34146)\ \text{km/h}.$$

11.22. Grupăm convenabil termenii din ambii membri ai primei relaţii şi desfacem parţial parantezele. Avem:

$$(x-3)^2-\frac{4}{3}(z+2)^2=1-\left(y\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{2}z+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2,\ \text{sau}$$

$$(x-3)^2-\frac{4}{3}(z+2)^2=1-3\left(y+\frac{2}{3}z+\frac{4}{3}\right)^2,\ \text{de unde}$$

$$(x-3)^2+3\left(y+\frac{2}{3}z+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}(z+2)^2=1.$$

Dezvoltînd parantezele avem:

$$x^2-6x+9+3\left(y^2+\frac{4}{9}z^2+\frac{16}{9}+\frac{4}{3}yz+\frac{8}{3}y+\frac{16}{9}z\right)-\frac{4}{3}(x^2+4z+4)=1,$$

sau

$$x^2-6x+9+3y^2+\frac{4}{3}z^2+\frac{16}{3}+4yz+8y+\frac{16}{3}z-\frac{4}{3}z^2-\frac{16}{3}z-\frac{16}{3}z=1,$$

sau

$$x^2+3y^2+4yz-6x+8y+8=0.$$

11.23. Notăm cu t, s şi c numărul tractoarelor, semănătoarelor şi combinelor. Avem:

$$t+s+c=137\,500;\ t=s+3\,900\ \text{şi}\ c=s-24\,000.$$

Înlocuim în prima relaţie pe t şi c, obţinem:

$$s+3\,900+s+s-24\,200=137\,500;\ s=52\,600;$$

$$t=s+3\,900=52\,600+3\,900=56\,500;$$

$$c=s-24\,200=52\,600-24\,200=28\,400.$$

Verificare: $50\,500+52\,600+28\,400=137\,500.$

11.24. Avem: $x+y+z=a$. Ridicînd la pătrat obţinem:

$$z^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zy)=a^2.$$

Dar $x^2+y^2=a^2$, prin urmare

$$a^2+2(xy+yz+zx)=a^2,\ \text{sau}$$

$$xy+yz+zx=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația $xy + yz + zx = 0$, scoatem pe fiecare din necunoscute, astfel:

$$x = -\frac{yz}{x+y};\ y = -\frac{zx}{z+x};\ z = -\frac{xy}{x+y},$$

pe care înlocuindu-le cu $x + y + z = a$, obținem:

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + a = 0.$$

11.28. Fie a și b înălțimile corespunzătoare laturilor x și y ale paralelogramului. Avem:

$$ax = by = S;\ \frac{a}{b} = \frac{y}{x} = \frac{3}{5} \text{ și } x + y = 45;$$

$$x = \frac{5y}{3};\ \frac{5y}{3} + y = 45;\ 8y = 135;$$

$$y = \frac{135}{8} = 16{,}875;\ x = 28{,}125 \text{ cm}.$$

11.30. Fie D deîmpărțitul, I împărțitorul, C câtul, R restul. Avem $D = I \cdot C + R$, și $R < I$, $R_1 < 24$, $D = 72C + 68$; $D = 24C_1 + R_1$.

Prin scădere obținem:

$$72C + 68 - 24C_1 - R_1 = 0,$$

sau

$$24(3C - C_1) = R_1 - 68,$$

$$24(C_1 - 3C) = 68 - R_1 = \text{multiplu de } 24,$$

deci R_1 poate fi $68 - 48 = 20$, deoarece

$$68 - 24 = 44 > 24, \text{ iar } 20 < 24, \text{ convine.}$$

Noul rest este 20, iar deîmpărțitul este $D = 24C_1 + 20$; unde C_1 satisface relația:

$$24(C_1 - 3C) = 68 - 20 = 48;\ C_1 - 3C = 2;$$

$C_1 = 2 + 3C$; adică C_1 poate fi 5, 8, 11,... iar D poate fi $24 \cdot 5 + 20 = 140$; $24 \cdot 8 + 20 = 212$.

Răspuns: $R_1 = 20$.

11.33. Putem scrie $V \cdot d = (V - 10)1$, $V(1 - d) = 10$, unde V este volumul și d densitatea aliajului.

Densitatea d' a amestecului este

$$d' = \frac{8 \cdot 0{,}8 + 2{,}1}{8 + 2} = 0{,}84.$$

$Vd + (V - 5)d'$ sau $V(d' - d) = 5d'$, deci

$V(0{,}84 - d) = 4{,}2$. Avem

$$\frac{V(1-d)}{V(0{,}84-d)} = \frac{10}{4{,}2} \text{ și rezultă } d = 0{,}724$$

$$V = \frac{10}{1-d} = \frac{10}{0{,}276} \approx 36 \text{ cm}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Masa aliajului M

$$M = V \cdot d = 36 \cdot 0{,}724 \approx 26 \text{ g}.$$

11.35. $N = 11^2x + y = 9^2y + x$ sau

$$121x + y = 81y + x, \text{ de unde } 3x = 2y.$$

Rezultă că $x = 2t$ și $y = 3t$, t fiind întreg.

Ținînd seama de valorile pe care le poate lua x și y fiind cifra în baza 9, adică $0 < x < 8$ și $0 < y < 8$ avem $2t \leqslant 8$ și $3t \leqslant 8$, deci $t \leqslant 2$.

Pentru $t = 1$, rezultă $x = 2$, $y = 3$, adică $203_{11} = 302_9$.

Pentru $t = 2$, rezultă $x = 4$, $y = 6$, adică $406_{11} = 604_9$.

11.36. $x = 20$ zile, $y = 30$ zile.

11.38. Presupunem că un număr m divide și pe numărător și pe numitor. În acest caz se divide și diferența lor.

$2x + 1 - (x + 1) = x$. Rezultă că m divide și pe x și pe $x + 1$, dar singurul divizor a două numere consecutive este 1, deci $m = 1$, deci cele două numere $(x + 1)$ și $(2x + 1)$ sînt prime între ele și fracția este deci ireductibilă.

11.40. Trebuie să avem $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$. Această egalitate are loc numai dacă a este de atîtea ori mai mic decît $\overline{ab}$, de cîte ori c este mai mic decît bc. Sau

$$\frac{10a + b}{a} = \frac{10b + c}{c};\ 10 + \frac{b}{a} = 10\frac{b}{c} + 1, \text{ de unde}$$

$9 + \frac{b}{a} = 10\frac{b}{c}$, deoarece $\frac{b}{a} \leqslant 9$ trebuie să avem $10\frac{b}{c} \leqslant 18$ sau $\frac{b}{c} \leqslant 1{,}8$.

Pentru $c = 1$, $b = 1$, nu convine.

Pentru $c = 2$, $b = 1$, $b = 2$ sau $b = 3$, atunci avem respectiv $a = -\frac{1}{4}$, $a = 2$ și $a = \frac{1}{2}$ care nu corespund.

Dacă $c = 3$, b poate fi 1; 2; 3; 4 sau 5, dar valorile corespunzătoare pentru a iar nu corespund.

Dacă $c = 4$, valorile $b = 6$ și $a = 1$ corespund la fel $b = 9$ și $b = 1$ corespund. Pentru $c = 6$ nu corespunde. Pentru $c = 7{,}8$ și 9 nu conduc la rezultate bune.

Deci avem fracțiile:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4},\ (c = 4);\ \frac{26}{65} = \frac{2}{5},\ (c = 5) \text{ și } \frac{19}{95} = \frac{1}{5},\ (c = 5).$$

11.42. $\frac{5 + x}{8 + x}$ trebuie să fie mai mare decît 0,999, adică $0{,}999 < \frac{5 + x}{8 + x}$ sau $0{,}999(8 + x) < 5 + x$, deci $x > 2\,992$.

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică pentru $x = 2\,993$ și avem:

$$\frac{5 + 2\,993}{8 + 2\,993} = \frac{2\,998}{3\,001} = 0{,}999\,000\,3,$$

$$1 - 0{,}999\,000\,3 = 0{,}000\,999\,7 < 0{,}001.$$

11.45. $\begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{3} \\ y_1 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -1 + \sqrt{3} \\ y_2 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = 1 - \sqrt{3} \\ y_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = 1 + \sqrt{3} \\ y_4 = 1 \end{cases}$;

11.46. Notăm cu x, y și z numărul bancnotelor, respectiv de 100, 25 și 5 lei. Avem:

$$100x + 25y + 5z = 7\,400;\ z + 1 = x;$$

$$y + 1 + 20 = x + 1 + z + 1. \text{ Rezultă}$$

$$x = 51;\ y = 82;\ z = 50.$$

11.53. Cum $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, ecuația a doua devine:

$$m^2x + m\sqrt{a^2m^2 + b^2} + x = \sqrt{a^2 + b^2m^2},$$

sau

$$x(1 + m^2) = \sqrt{a^2 + b^2m^2} - m\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

de unde rezultă:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + m^2b^2} - m\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{1 + m^2}, \tag{1}$$

$$y = \frac{m\sqrt{a^2 + m^2b^2} + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{1 + m^2}. \tag{2}$$

Relațiile (1) și (2) ridicate la pătrat și adunate, dau:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{(1 + m^2)^2}\left[a^2 + m^2b^2 + a^2m^4 + b^2m^2 - 2m\sqrt{a^2 + m^2b^2}\cdot\sqrt{a^2m^2 + b^2} + \right.$$

$$\left. + m^2a^2 + m^4b^2 + 2m\sqrt{a^2 + m^2b^2}\cdot\sqrt{a^2m^2 + b^2} + a^2m^2 + b^2\right] =$$

$$= \frac{1}{(1 + m^2)^2}[a^2(1 + 2m^2 + m^4) + b^2(1 + 2m^2 + m^4)] = \frac{(1 + 2m^2 + m^4)(a^2 + b^2)}{(1 + 2m^2 + m^4)} =$$

$$= a^2 + b^2. \text{ Deci } x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

11.54. Cu grîu s-a cultivat 600 ha, cu porumb 750 ha, cu mazăre 150 ha, cu floarea-soarelui 150 ha, cu sfeclă 300 ha, cu lucernă 75 ha și cu trifoi 75 ha; în total s-a cultivat 2 100 ha.

11.59. Ridicînd la cub prima ecuație avem:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3x(y^2 + z^2) + 3y(x^2 + z^2) + 3z(x^2 + y^2) + 6xyz = a^3. \tag{1}$$

Din ecuația a doua deducem:

$$y^2 + z^2 = m^2 - x^2;\ x^2 + z^2 = m^2 - y^2;\ x^2 + y^2 = m^2 - z^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituind în (1) și ținînd seama și de ecuația a treia, avem:

$$a^3 + 3x(m^2 - x^2) + 3y(m^2 - y^2) + 3z(m^2 - z^2) + 6xyz = a^3$$

sau

$$a^3 + 3m^2(x + y + z) - 3(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz = a^3,$$

de unde rezultă:

$$a^3 + 3am^2 - 3a^3 + 6xyz = a^3.$$

Ca produsul xyz să fie nul trebuie ca:

$$3a \cdot m^2 - 3a^3 = 0, \text{ adică } m^2 = a^2$$

$$\text{sau } m = \pm a.$$

11.60. Scriem $a + b = a \cdot b$ sau $a = b(a - 1)$. Numerele a și $(a - 1)$ nu pot fi de aceeași paritate. Dacă a este par, atunci $a - 1$ este impar și b trebuie să fie par. Dacă a este impar, $(a - 1)$ este par și $b(a - 1)$ este tot par, deci imposibil ca un număr impar să fie și par.

Pentru $a = 2$, rezultă $b = 2$.

Pentru $a = 4$; $4 = 3b$; $b = \frac{3}{4}$ nu convine. Fie $a = 2p$, atunci

$2p = (2p - 1)b$ sau $b = \frac{2p}{2p - 1}$ care nu poate fi întreg decît pentru $p = 1$.

Deci singura soluție este $a = 2$, $b = 2$.

11.63. $N = 5 \cdot (5^2)^n \cdot 2^2 \cdot 2^n + 3^2 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 4^n = 5 \cdot 25^n \cdot 4 \cdot 2^n + 18 \cdot 3^n 4^n = 20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n = (19 + 1)50^n + (19 - 1)12^n = \mathfrak{M}19 + 50^n - 12^n = \mathfrak{M}19 + (2 \cdot 19 + 12)^n - 12^n = \mathfrak{M}19 + 12^n - 12^n = \mathfrak{M}19.$

11.69. Notăm cu x viteza bărcii într-o apă stătătoare și prin urmare $x + 3$ este viteza în josul apei și $x - 3$ este viteza bărcii în susul apei.

Timpul total este $\frac{28}{x + 3} + \frac{28}{x - 3} = 7$ ore, de unde obținem $x^2 - 8x = 9$ sau $x^2 - 8x + 16 = 9 + 16$; adică $(x - 4)^2 = 25$; $x - 4 = 5$, deci $x = 9$ km pe oră pentru $x - 4 = -5$, $x = -1$ nu convine fiind negativ.

11.70. Formăm sistemul

$$5x + 3y + 4z = 7{,}05.$$
$$3x + 4y + 5z = 8{,}75,$$
$$4x + 5y + 3z = 8{,}20.$$

Răspuns: $x = 0{,}10$ lei costul peniței, $y = 0{,}85$ lei costul unui creion și $z = 1{,}05$ lei costul unui caiet.

11.74. Timpul de 9 ore și 36 minute este 9,6 ore. Fie x timpul în care al doilea robinet umple bazinul.

Formăm ecuația $9{,}6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 8}\right) = 1$, de unde $10x^2 - 272x + 768 = 0$, convine $x = 24$ ore.

Scanned with OKEN Scanner

11.80. Notăm necunoscuta cu x şi avem:

$x - \frac{4x}{100} + 1\,200 = \frac{96x}{100} + 1\,200$. După a doua zi a avut

$$\frac{96x}{100} + 1\,200 - \frac{5}{100}\left(\frac{96x}{100} + 1\,200\right) + 1\,200 = \frac{114x}{125} + 2\,340.$$

După ziua a treia a rămas cu.

$$\frac{114x}{125} + 2\,340 - \frac{10}{100}\left(\frac{114x}{125} + 2\,340\right) = \frac{513x}{625} + 2\,106.$$

Deci

$$\frac{513x}{625} + 2\,106 = x + \frac{121}{500}x, \text{ de unde } x = 5\,000 \text{ cărţi.}$$

11.83. Fie x, y, z, t numărul cerut de ţigle.

$$x + y = 7\,200;\ \frac{120}{100}x + \frac{125y}{100} = 8\,680.$$

Rezultă: $x = 6\,400$, $y = 800$, $t = \frac{125}{100}y = \frac{125 \cdot 800}{100} = 1\,000$;

$$z = 8\,680 - t = 8\,680 - 1\,000 = 7\,680.$$

11.87. Fie x numărul persoanelor cu care a plecat troleibuzul, y costul unui bilet şi z numărul staţiilor intermediare. Formăm ecuaţiile:

$$xy = 10;\ x + z = 28;\ (x + 4z)y = 26;$$

$xy - (x + 4z)y = -4yz = 10 - 26 = -16$, deci $x + z = 28$, deci $y = 0{,}50$ lei;

$$z = \frac{4}{y} = \frac{4}{0{,}5} = 8;\ x = 28 - z = 28 - 8 = 20.$$

11.99. Vor pleca 160 copii în 5 autocare.

11.102. $S = vt$; $20 = vt = (v + 1)(t - 1)v = 4$, $t = 5$

Rezultă viteza normală care este 4 km/oră şi timpul 5 ore.

Altă soluţie: $20 = vt = (v + 1)(t - 1)$ sau

$$20 = vt \text{ şi } t - v - 1 = 0,\ t = v + 1$$
$$20 = v(v + 1);\ v^2 + v - 20 = 0;\ v_1 = 4$$

şi $v_1 = -5$ care nu convine.

11.104. $S = vt$. Avînd o întîrziere de 16 minute, ar trebui să cîştige spaţiu de $\frac{16v}{60}$ km.

Timpul de 16 minute este egal cu $\frac{16v}{60}$ km. Timpul de 16 minute este egal cu $\frac{16}{60}$ ore.

$\frac{80}{v + 10} + \frac{16}{60} = \frac{80}{v}$, adică timpul parcurs adunat cu timpul de întîrziere este egal cu timpul necesar a parcurge 80 km cu viteza normală.

Ecuaţia devine $v^2 + 10v - 3\,000 = 0$; $v = 50$ km/h.

Cei 80 km i-a parcurs cu viteza de $50 + 10 = 60$ km.

Scanned with OKEN Scanner

Geometria

Capitolul XII

12.1. $52°10'07''$; $27°15'51''$; $140°59'09''$.

12.2. $205°21'15''$.

12.3. $68°38'19''$.

12.4. 1 radian $= 57°17'44''$.

12.5. Se transformă și numărătorul și numitorul în secunde și apoi se face împărțirea.

12.6. $A = \left(127° + \frac{47°}{60} + \frac{20°}{3\,600}\right)$ grade sexagesimale. 1 grad centezimal are $B = \frac{90 \cdot 3\,600}{100}$ secunde sexagesimale. Numărul de grade centezimale este dat de raportul $\frac{A}{B}$.

12.7. Fie x unghiul făcut de raza din dreptul lui 12 și arcul orar cînd este în prelungire cu minutarul. Unghiul străbătut de minutar de la 12 este $180 + x$, însă minutarul merge de 12 ori mai repede ca orarul, deci $180 + x = 12x$, de unde $x = \frac{180}{11}$; $x = 16°21'49'' \frac{1}{11}$.

$$180 + x = 196°21'49'' \frac{1}{11}.$$

Deci la 180° minutarul arată 30 minute; într-un minut parcurge un unghi de 6°. Timpul parcurs de la ora 12 pînă ce orarul și minutarul sînt în prelungire este dat de raportul $\frac{196°21'49'' \frac{1}{11}}{6} = 32$ minute 43 secunde $\frac{229,(9)}{350}$.

Scanned with OKEN Scanner

12.8. 27 minute și 16 $\frac{4}{11}$ secunde.

12.9. $60 + \frac{150}{12} = 72°30'$.

12.10. 5°.

Capitolul XIII

13.1. $\sphericalangle A'HB' = 180° - C = 21°, 59'29''$;
$\sphericalangle B'HC' = 180° - A = B + C = 64°29' + 58°31'' = 122°29'21''$;
$\sphericalangle C'HB' = A + C = 180 - B = 115°, 30'$.

13.2. $\sphericalangle IBC = \frac{64°,23'}{2} = 32°11'30''$;
$\sphericalangle ICB = 180° - 32°11'30'' - 126°9' = 21°39'30''$.
$C = 2\sphericalangle ICB = 2 \cdot 21°39'30'' = 43°19'$;
$A = 180° - B'' - C'' - 180° - 64°, 23' - 43°, 10' = 72°18'$.

13.3. $\sphericalangle A = 78°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 51°$.

13.4. $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 65°$, $\sphericalangle C = 75°$, H fiind intersecția înălțimilor AA' și BB', avem $\sphericalangle AHB' = 75°$.

13.6. $\sphericalangle AMC = 140°$, $\sphericalangle ANC = 40°$.

13.7. *Soluția. a)* Este necesar să avem:

$$a + 2r < a + (a + r) \text{ sau } r < a, \text{ deci}$$

b) Dacă r este constant, a nu poate fi mai mic decît r nici chiar egal cu r, deci a poate lua o valoare mai mare decît r, căci n-ar mai fi îndeplinite condițiile inițiale.

13.8. Laturile egale nu pot fi de 12 cm fiecare, fiindcă suma lor este 24 cm, mai mică decît 25 cm.

13.9. *Soluție.* 1) Cazul cînd punctul C_1 este la stînga lui A, notăm $C_1A = x$, $AM = a$, $MB = a$. Avem $|AB - BC| = AB = 2a$; $2a \leqslant 2(x + a)$, egal dacă C_1 este în A, iar dacă $2(x + a) \leqslant x + 2a + x$ este valabil numai semnul egal.

2) Punctul C_2 este între A și M. Avem $|AC - BC| = |x - (2a - x)| = 2(a - x)$,

$$2CM = 2(a - x); \text{ deci } |AC - BC| = 2CM,$$

$AC + BC = x + 2a - x = 2a$; $2CM = AC + BC$, dacă C_2 este în A;

3) Punctul C_3 este între M și B. Avem $|AC - BC| = |a + x - (a - x)| = 2x$. $2CM = 2x$, deci $|AC - BC| = 2CM$; $AC + BC = 2a$, deci $2CM \leqslant AC + BC$, semnul egal se cercetează cînd C_4 este la dreapta lui B.

Scanned with OKEN Scanner

13.10. Fie ABC și AA_1, BB_1, CC_1 cele trei înălțimi și H intersecția înălțimilor.

$$\sphericalangle B_1HB_1 = 180° - A;\ \sphericalangle C_1HA_1 = 180° - B;\ \sphericalangle A_1HB_1 = 180° - C;$$
$$\sphericalangle C_1HB = A;\ \sphericalangle A_1HC = B;\ \sphericalangle BHA = C;$$
$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle B_1HC_1 = 180° - A.$$

13.13. Fie I, K, L proiecțiile punctelor F, A, D pe dreapta BC. Triunghiurile dreptunghice BAK și FBI sînt egale, deoarece $AB = FB$ și $\sphericalangle BAK = \sphericalangle FBI$ avînd același complement. Rezultă $FI = BK$. Analog din egalitatea triunghiurilor dreptunghice ACK și DLC rezultă $DL = CK$, deci $FI + DL = BK + CK = BC$.

13.14. O diagonală unește două vîrfuri ale poligonului care nu sînt consecutive. Dacă poligonul are 12 laturi are tot 12 vîrfuri. Dintr-un vîrf pleacă $12 - 3 = 9$ diagonale; însă o diagonală unind 2 vîrfuri rezultă că numărul diagonalelor este

$$\frac{12 \cdot 9}{2} = 54 \text{ diagonale.}$$

Dacă poligonul are 100 laturi vom avea

$\frac{100(100-3)}{2} = 50 \cdot 97 = 4850$ diagonale. Numărul diagonalelor pentru poligonul convex cu n vîrfuri este $N = \frac{n(n-3)}{2}$. Se observă că N este întreg, fiindcă dacă n este par fracția se simplifică cu 2, iar dacă n este impar, atunci $n - 3$ este par pozitiv; $n > 3$.

13.15. Fie E piciorul perpendicularei duse din C pe dreapta AD. Punctul E este în afara segmentului AD, adică $AE > AD$. Fie F intersecția dreptelor AB, CE. Paralela dusă din E la BC taie dreapta AB în L. Fie P piciorul perpendicularei duse din E pe AB.

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ALE > \sphericalangle AFE = \sphericalangle ACF.$$

$EL < EF$ ca oblică mai apropiată de piciorul perpendicularei EP; însă $BD < EL$. Rezultă $BD < EF$. Cum $EF = CE$, avem $BD < CE$.

13.17. Avem $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCD = \frac{90°}{2} = 45°$, deoarece $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 90°$; iar BF și CE sînt bisectoare.

Unghiul CMF este exterior triunghiului MBC deci egal cu suma $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCD = 45°$. Rezultă că $\sphericalangle CMF = \sphericalangle MBE = 45°$.

Pentru a arăta că $CD = DE$, observăm că:

$\sphericalangle DEC = 90° - \sphericalangle ACE$ și

$\sphericalangle DCE = 90° - \sphericalangle BCE = 90° - \sphericalangle ACE$.

Rezultă că unghiurile DEC și DCE sînt egale și deci $DE = DC$.

13.18. Ducem BE la 20° față de BC. Avem $BC = BE$, din triunghiul isoscel BCE. Avem $BC = BN$, din triunghiul isoscel BCN cu unghiurile de 80°, 50°, 50°. Însă $\sphericalangle NBE = 60°$, deci triunghiul BNE este echilateral. Cum $NE = ME$ triunghiul NME este isoscel, unghiul din E de 40°; rezultă că $\sphericalangle NME = 70°$. Scăzînd unghiul $BME = 40°$, obținem $\sphericalangle NMB = 30°$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIV

14.1. $\frac{A}{5} = \frac{B}{6} = \frac{C}{7} = \frac{180°}{18} = 10°$;

$$A = 50°;\ B = 60°;\ C = 70°.$$

Fie CC_1 înălțime și CC_2 bisectoare.

$$\sphericalangle BCC_1 = 90° - 60° = 30°;\ \sphericalangle BCC_2 = 35°, \text{ deci}$$
$$\sphericalangle C_1CC_2 = 35° - 30° = 5°.$$

14.2. Unghiul $DBE = 15°$; $\sphericalangle ABD = 30°$, deci $AD = OC = BC$, însă $BC = EC$. Rezultă că $OC = EC$ și triunghiul COE este isoscel.

$2\sphericalangle OEC = 180° - 30° = 150°$, deci $\sphericalangle OEC = 75°$, $\sphericalangle EOC = 75°$. Prin urmare $\sphericalangle BPC = 180° - (60° + 45°) = 75°$.

14.3. Observăm că triunghiurile $AC'E$ și $AC'C$ sînt dreptunghice avînd unghiul drept în C'. Rezultă $\sphericalangle C'EA = 90° - \frac{60°}{2} = 60°$;

$\sphericalangle C'CA = 90° - 60° = 30°$. Tot astfel $\sphericalangle B'HC = 90° - 30° = 60°$. Două unghiuri ale triunghiului OEH fiind de cîte 60°, triunghiul este echilateral.

14.4. $\sphericalangle CDB = 135°$.

14.8. Avem: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BEC$ ca unghiuri corespondente. $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BCE$ ca alterne interne, iar $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ formate prin ducerea bisectoarei unghiului B, deci $BE = BC$.

Analog se arată că triunghiul BCF este isoscel, deci $CF = BC$, rezultă $BE = CF$.

b) $\sphericalangle ABC = 19°16' \cdot 2 = 38°32'$;
$\sphericalangle ACB = 39°14' \cdot 2 = 78°28'$;
$A = 180 - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB = 63°$.
$\sphericalangle DBM = 19°16' + 39°14' = 58°30'$;
$\sphericalangle DBM + \sphericalangle BDC = 180°$;
$\sphericalangle DBC = 180° - 58°30' = 121°30'$.

14.9. Fie M punctul pe BC astfel ca suma $MA_1 + MA_2$ să fie minimă. Dacă A_1' este simetricul lui A_1 față de BC, iar A_2' simetricul lui A_2, atunci $MA_1 = MA_1'$ oricare ar fi M pe BC și deci $MA_1' + MA_2 = MA_2'$, rezultă că suma $MA_1' + MA_2$ este minimă cînd punctele A_1', M, B sînt în linie dreaptă și deci M este și pe mediatoarea laturii A_1A_2.

14.10 1) Patrulaterul cu 2 laturi opuse egale și paralele.
2) Patrulaterul la care diagonalele se taie în părți egale.
3) Patrulaterul plan cu unghiurile opuse egale.
4) Patrulaterul plan cu 2 unghiuri opuse egale și 2 laturi opuse egale.
5) Patrulaterul la care unghiurile de la capetele oricărei laturi sînt suplimentare. Toate cele 5 patrulatere sînt paralelograme.
6) Orice dreaptă care trece prin intersecția diagonalelor intersectează laturile opuse în puncte simetrice față de intersecția diagonalelor.

Scanned with OKEN Scanner

14.11. Se construiesc simetricele punctelor față de laturile triunghiului.

14.12. Avem $\sphericalangle NAM = \sphericalangle AMP = \sphericalangle AMN$, deci triunghiul AMN, este isoscel, $\sphericalangle NCB = \sphericalangle NAM$; $\sphericalangle CBN = \sphericalangle AMN$, deci și triunghiul CBN este isoscel.

Triunghiurile ABM și MCA sînt egale, deoarece AM este comună, $\sphericalangle CAM = \sphericalangle AMB$ și $AC = MB$ ca diferențe de segmente egale.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle MCB$ ca suplimente ale sumelor de unghiuri egale: $\sphericalangle ABM + \sphericalangle CBN = \sphericalangle MCA + \sphericalangle BCN$, deci triunghiul BCD este isoscel.

Triunghiurile CDN și BDN sînt egale, avînd laturile respective egale și deci $\sphericalangle CND = \sphericalangle DNB$, adică ND este bisectoare în triunghiul isoscel ANM, și mai este înălțime în triunghiul ANM, rezultă că ND și AM sînt perpendiculare.

14.15. $\sphericalangle BCE = 16°50'35''$.

14.16. Se deplasează punctul A spre B pe o paralelă la (d) pe distanța a, în punctul A', apoi se construiesc simetricele lui A' și B față de dreapta (d).

14.18. Figurile $MBA'C$, $MCB'A$, $MAC'B$ sînt paralelograme. De aci rezultă că triunghiurile $AB'C'$ și MBC sînt egale, și deci BC și $B'C'$ sînt egale și paralele. La fel triunghiurile ABC' și $A'C'B$ sînt egale și deci AC și $A'C'$ sînt egale și paralele. Rezultă imediat că și triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au laturile respectiv egale și paralele, deci sînt egale între ele.

14.19. La figura construită mai ducem OE și OF perpendiculare, respectiv pe AB și CD. Avem $\sphericalangle NOE = \sphericalangle SOF$; iar triunghiurile dreptunghice NOE și SOF sînt egale, deci $ON = OS$ și $\sphericalangle ONS = \sphericalangle OSN = 45°$.

La fel se demonstrează că $OP = OL$ și că $\sphericalangle OPL = \sphericalangle OLP = 45°$; $\sphericalangle ONS = \sphericalangle OLP = 45°$, deci NS și PL sînt paralele. Triunghiurile dreptunghice OPN și OSL sînt egale și $NP = SL$, adică trapezul $PLSN$ este isoscel.

Mai avem $\sphericalangle BKO = \sphericalangle CRO$ avînd laturile perpendiculare și fiind ascuțite. Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice FOM și EOQ avem $OM = OQ$ și $\sphericalangle OMQ = \sphericalangle OQM = 45°$.

Din triunghiurile dreptunghice OKG și ORM egale, avem $KQ = RM$, și deci $KRMQ$ este trapez isoscel.

Fig. 14.19.

14.25. Deoarece ME și AD sînt paralele și de asemenea MD și AE sînt paralele rezultă că patrulaterul $ADME$ este un paralelogram. Deci $EN = ND$. Patrulaterul $DEGF$ este trapez, iar MN este linie mijlocie în trapez. Prin urmare $MG = MF$.

Fig. 14.25.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XV

15.1. Ducem o coardă oarecare, apoi cu echerul negradat se poate construi un dreptunghi înscris în cerc având o latură chiar coarda desenată. Diagonalele dreptunghiului se taie în centrul cercului.

15.2. $108° - 90° = 18°$. Deci unghiul de 18° se construieşte imediat scăzînd 90° din 108°; $108° : 3 = 36°$, însă $36 = 2 \cdot 18$. Unghiul de 36° fiind dublul unghiului de 18°, construcţia este evidentă prin dublarea unghiului $54 : 3 = 18°$; iar $27° : 3 = 9°$, dar 9° este $\frac{18}{2}$; unghiul de 9° se află ducînd bisectoarea unghiului de 18°.

15.3. Prin ipoteză O_1A şi O_2B sînt paralele, de asemenea O_1B şi O_2A sînt egale, deci figura O_1ABO_2 este un trapez isoscel, de unde $AB = O_1O_2 =$ constant.

Fig. 15.3.

15.4. Pentru a arăta că triunghiul PDC este isoscel, ţinem seama că $\sphericalangle MAC = \sphericalangle NAD$ şi au ca măsură arcul $\frac{MC}{2}$, respectiv arcul $\frac{ND}{2}$.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{MC} \text{ şi } \overset{\frown}{NE} = \overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{ND}.$$

Deoarece $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE} = 180°$ rezultă $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{NE}$ şi prin urmare $\sphericalangle PDC = \sphericalangle PCD$ având aceeaşi măsură.

Fig. 15.4.

15.9. Fie $A_1B_1C_1$ intersecţiile înălţimilor din A, B, C cu cercul. $A_1 = 180° - 2A$; $B_1 = 180° - 2B$, $C_1 = 180° - 2C$.

15.10. Ducem diametrele BB_1 şi BB_2, respectiv în cercurile O şi O'. Triunghiurile OCB şi $O'C'B$ sînt isoscele, deci: $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle O'C'B = \sphericalangle O'BC'$. Mai avem:

$$\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC = \text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{B_1C}}{2} = \sphericalangle CAB_1 = \sphericalangle C'AB_2 = \text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{B_2C'}}{2} =$$

$= \sphericalangle B_2BC' = \sphericalangle O'C'B$, deci $\sphericalangle OCB = \sphericalangle O'C'B$.

15.11. Latura pătratului subîntinde un arc de 90°, iar coarda de lungimea razei un arc de 60°.

15.12. Punctele $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ sînt pe acelaşi cerc. Suma măsurilor arcelor cuprinse între laturile unghiurilor fac întreg cercul, adică 360°, unghiurile fiind înscrise în arc, suma lor este pe jumătate, adică $360° : 2 = 180°$.

Scanned with OKEN Scanner

15.13. Fie E' şi D' simetricele punctelor D şi E faţă de BC. Aria $BDCE$ = aria BDC + aria $BEC = \frac{1}{4} BC \cdot DD' = \frac{1}{4} BC \cdot EE'$, dar DD' şi EE' sînt cele mai mari cînd sînt diametre în cele două cercuri, adică dacă unghiul BAD este de 45°.

15.14. În triunghiurile dreptunghice AMA' şi MNA' avem $\sphericalangle MAN' = \sphericalangle NMA' = 30°$, deci $2A'M = AA'$ şi $A'M = 2A'N$. Prin adunare obţinem $3A'M = AA' + 2A'N$.

Fig. 15.14.

15.15. Trapezul isoscel fiind circumscris vom ţine seama că centrul O al cercului înscris se va afla la intersecţia bisectoarelor. Avem:

$$\sphericalangle AOD = 120°, \sphericalangle OAD = \sphericalangle OAB = \sphericalangle ODA = \sphericalangle ODC.$$

Rezultă că $\sphericalangle ABE = 30°$. Deci $AE = \frac{AB}{2}$, dar $AB = CD$ şi $AB + CD = 28$ cm; $AB = 14$ cm, $AE = 7$ cm.

Rezultă că $BC = 7$ cm şi $AD = 21$ cm.

Fig. 15.15.

15.16. Notăm cu M mijlocul lui AB. Avem $\sphericalangle AIB = \sphericalangle AOB = \frac{360°}{5} = 72°$. Mai avem $\sphericalangle ACB = \frac{72°}{2} = 36°$.

Rezultă $\sphericalangle IBC = 180° - 72° - 36° = 180° - 108° = 72°$. Fiindcă $\sphericalangle CIB = \sphericalangle IBC = 72°$, triunghiul IBC este isoscel.

15.17. $\overset{\frown}{CB_1} = 180° - \overset{\frown}{BC} = 180° - 2A$,

$\overset{\frown}{B_1A} = \overset{\frown}{CA} - \overset{\frown}{CB_1} = 2B - (180° - 2A)$.

Analog $\overset{\frown}{C_1A} = 2C - (180° - 2A)$; $\overset{\frown}{A_1C} = 180° - 2C$;

$\overset{\frown}{A_2C} = A$; deci $\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_1C} - \overset{\frown}{A_2C} = 180° - 2C - A$;

$\overset{\frown}{A_2B_1} = \overset{\frown}{A_2C} + \overset{\frown}{CB_1} = A + 180° - 2A = 180° - A$;

$\overset{\frown}{BA_1} = 180° - 2B$; $\overset{\frown}{BC_1} = 180° - 2B$. Cunoscînd măsurile arcelor de pe cerc în funcţie de A, B, C se exprimă unghiurile patrulaterului $A_1A_2B_1C_1$.

15.18. Avem mai întîi $\sphericalangle A_1BP = \sphericalangle A_1CP$. (1)

Cercul cu diametrul BP trece prin A_1 şi M; iar cercul cu diametrul PC trece prin A_1 şi N. Prin urmare $\sphericalangle A_1BP = A_1MP$ avînd aceeaşi măsură, la fel $\sphericalangle A_1CP = \sphericalangle A_1NP$.

Ţinînd seama de (1) rezultă

$$\sphericalangle A_1MP = \sphericalangle A_1NP.$$

Fig. 15.18.

Scanned with OKEN Scanner

15.19. $\sphericalangle OAT_1 + \sphericalangle OAI = 90°$ și $\sphericalangle OAT_1 + \sphericalangle AOT_1 = 90°$, deci $\sphericalangle AOT_1 = \sphericalangle OAI$, însă $\sphericalangle AOT_1 = \sphericalangle AOI$, de unde rezultă $\sphericalangle AOI = \sphericalangle OAI$ și deci $OI = AI$.

15.20. Se construiește triunghiul dreptunghic ABC având ipotenuza AB și cateta $AC = 0{,}6\ AB$. Dreapta BC și paralela dusă din A la BC sînt paralelele cerute.

15.21. Se duce înălțimea CE a triunghiului ABC. Triunghiurile ACD și ACE sînt egale și deci $CD = EA = BE$.

15.22. Arcul de 10 metri este mai mare decît jumătatea lungimii cercului care este de 8 metri. Arcul mic AB este de $16 - 10 = 6$ metri. Punctul C va fi pe cerc de o parte sau alta a coardei AB astfel că arcul $AC = 4$ m, sînt deci două soluții corespunzînd triunghiurile ABC' și ABC''. În fiecare caz se află unghiurile triunghiurilor. Calculul unghiurilor triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și A_1B_1C'' se face ținînd seama ca $A_1 = 180° - A$, vezi problema 15.17.

15.24. Se fixează mai întîi punctele date, apoi se află punctul C și B.

15.25. Fie D, E, P picioarele perpendicularelor duse din A respectiv pe bisectoarele unghiului B, unghiul lui C și pe latura BC. Avem $\sphericalangle CAP = B$ și $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABD = \frac{B}{2}$, deci $\sphericalangle DAP = B - \frac{B}{2}$.

15.26. Pe o dreaptă D luăm segmentul A_1A_2. Din A_2 ca centru descriem cercul de rază $\frac{BC}{2}$, care taie dreapta D în B și C. Construim perpendiculara în A_1 și BC și luăm pe ea A_1H de lungimea dată. Dreapta CH mai taie cercul descris în C_1.

Dreapta BC_1 intersectează dreapta A_1H în care A este al treilea vîrf al triunghiului cerut.

15.27. Din C se duce tangentă la cercul cu centrul în A și raza cît înălțimea trapezului care taie pe OA în punctul B. Paralela dusă din A la BC taie pe OC în D.

15.28. Se notează cu A', B', C' punctele opuse vîrfurilor A, B, C. Avem $\sphericalangle B'AC = 90° - A$; $\sphericalangle C'BA = 90° - B$ și $\sphericalangle A'CB = 90° - C$. Rezultă $A' = 90° - (90° - C) = C$; $B' = 90° - (90° - A) = A$ și $C' = B$.

15.29. Se notează cu A', B', C' intersecțiile înălțimilor cu arcul circumscris. $\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle ABB' = 90° - A$, la fel $\sphericalangle AA'C' = \sphericalangle ACC' = 90° - A$, rezultă că înălțimile triunghiului ABC sînt bisectoare în triunghiul $A'B'C'$. Deci ducînd bisectoarele triunghiului $A'B'C'$ întîlnesc cercul în A, B, C respectiv.

15.30. Se construiește mai întîi un triunghi dreptunghic ABC, avînd cateta AB cît înălțimea trapezului, cateta AC cît semidiferența bazelor. Ipotenuza BC va fi coardă în cercul de rază R dată.

15.31. Fie $R_2 > R_1$ și R raza cercului cu centrul în O. Avem $OO_1 = R_1 + R$; $OO_2 = R_2 - R$ și $O_1O_2 = R_2 - R_1$.

Rezultă $R_1 + R + R_2 - R = R_1 + R_2$.

Scanned with OKEN Scanner

15.32. Desenăm latura BC, punctul A_1 și punctul A_2. Centrul cercului se află pe perpendiculara dusă din A_1 pe BC la distanța OA_2 de A_2. Descriem cercul, îl intersectăm cu perpendiculara din A_2 pe BC și obținem astfel vîrful A.

15.33. Descriem cercul înscris. Presupunem problema rezolvată. Razele duse prin punctele de tangență ale laturilor unghiului de 60° fac între ele 180° — 60° = = 120°; iar razele duse prin punctele de tangență ale laturilor unghiului de 45° fac între ele un unghi de 180° — 45° = 135°. Tangentele la cerc duse prin capetele razelor desenate sînt laturile triunghiului cerut.

15.34. Fie M' și N' proiecțiile punctelor M și N pe AC; N_1 intersecția lui NN' cu cercul descris pe BC ca diametru, iar B_1 și C_1 intersecțiile lui AC și AB cu același cerc. B_1 și C_1 sînt picioarele înălțimilor BB_1 și CC_1.

Triunghiul MN_1N este dreptunghic în N_1 fiind înscris într-un semicerc. Deci, cateta MN_1 este paralelă cu $M'N'$. Arcul MB_1 este egal cu arcul N_1C. Rezultă că arcul N_1C este egal cu arcul MC_1; deoarece C_1 este simetricul lui B_1 față de AA', rezultă că arcele MN_1 și C_1C sînt egale.

Rezultă $M'N' = MN_1 = AA_1$.

15.35. Fie D_1 și D_2 două drepte care fac între ele unghiul dat α. Luăm pe D_1 punctul A astfel ca MA să aibă lungimea dată.

Construim perpendiculara în M pe D_2 și descriem din M ca centru, cercul de diametru BC, care taie perpendiculara pe D_2 în M, respectiv în B și C. Unim punctele B și C și cu A și obținem triunghiul căutat.

15.36. Fie I centrul cercului înscris în triunghi, iar I_1, I_2, I_3 punctele de tangență ale laturilor BC, CA, AB cu cercul înscris.

Observăm că II_1 și înălțimea AD sînt paralele, deci unghiul I_1IA egal cu unghiul DAA_1 în care AA_1 este bisectoarea unghiului A.

Cercul de diametru AI trece prin I_2 și I_3. Urmează construcția. Luăm două drepte Δ_1 și Δ_2 care se taie în I și fac un unghi egal cu $\sphericalangle DAA_1$. Din I ca centru descriem cercul înscris de raza dată, care taie pe Δ_1 în I_1. Construim perpendiculara pe Δ_1 în I_1 care taie pe Δ_2 în A_1; pe prelungirea lui A_1I luăm A_1A de lungime dată.

Descriem cercul cu diametru IA, care taie cercul I în I_2 și I_3. Unim pe A cu I_2 și I_3 și prelungim pînă taie dreapta IA_1, respectiv în C și B.

15.37. Bisectoarea cerută este paralelă cu baza triunghiului. Pentru a construi unghiul cerut se construiește mai întîi un triunghi dreptunghic avînd un unghi egal cu cel dat, apoi repetînd construcția triunghiului dreptunghic, obținem unghiul ce trebuia construit.

15.38. Considerăm un triunghi ABC cu latura BC și medianele BB_1 și CC_1 cunoscute. Paralela din B_1 la mediana CC_1 întîlnește latura BC în D. Ținînd seama că $CD = B_1C_1 = \frac{BC}{2}$, facem următoarea construcție: Construim triunghiul BB_1D

Scanned with OKEN Scanner

în care cunoaştem laturile. Luăm segmentul DC spre B egal cu $\frac{BC}{2}$. Unim C cu B_1 şi prelungim cu un segment B_1A egal cu B_1C şi astfel este construit triunghiul ABC.

15.39. Ducem înălţimea AM. Se observă că patrulaterele $ANMB$ şi $AMPC$ sînt inscriptibile. Avem $\sphericalangle MNP = \sphericalangle ABC = 60°$ şi $\sphericalangle MNP = \sphericalangle ACB = 60°$. Avînd două unghiuri de 60° triunghiul este echilateral.

15.40. Evident că $ME = MF$, deci triunghiul EMF este isoscel şi deci $\sphericalangle FEM = \sphericalangle EFM$. (1)

În triunghiul BFJ avem $\sphericalangle EFM = 180° - \sphericalangle CBD - \sphericalangle BJF$ (2)

iar din triunghiul CEG găsim:

$$\sphericalangle FEM = 180° - \sphericalangle BCA - \sphericalangle CGE. \quad (3)$$

Ţinînd seama de (2) şi (3) relaţia (1) devine

$$\sphericalangle CBD + \sphericalangle BJF = \sphericalangle BCA + \sphericalangle CGE,$$

dar

$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BCA$, deci $\sphericalangle BJF = \sphericalangle CGE$ sau

$\sphericalangle IJH = \sphericalangle IGH$, adică patrulaterul $IGJH$ este inscriptibil.

15.41. *Soluţia I.* Conform teoremei lui Thales, avem: $\frac{AD}{AF} = \frac{DE}{FH} = \frac{AE}{AH}$; însă $\frac{AD}{AF} = \frac{2}{3}$, de unde

$$3DE = 2FH.$$

Soluţia a II-a DE fiind linie mijlocie în triunghiul ABC avem $DE = \frac{BC}{2}$; FH fiind linia mijlocie în trapezul $BDEC$ avem

$$FH = \frac{DF + BC}{2} = \frac{\frac{BC}{2} + BC}{2} = \frac{3BC}{4} = \frac{6DE}{4} = \frac{3DE}{2},$$

de unde $2FH = 3DF$.

15.42. Ţinînd seama că OM şi AB sînt paralele şi că ON şi CD sînt paralele şi de teorema lui Thales, avem: $\frac{OM}{AB} = \frac{OC}{AC}$ şi $\frac{ON}{CD} = \frac{AO}{AC}$, de unde obţinem

$$\frac{OM}{AB} + \frac{ON}{CD} = \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1.$$

15.48. Triunghiurile ANM şi DNC fiind asemenea avem

$$\frac{AM}{DC} = \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}.$$

Deci

$$\frac{AN}{AN + NC} = \frac{1}{5 + 1} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

15.50. *a)* Ducînd $A'M$ paralelă la BB', ea va fi linie mijlocie în triunghiul BCB', deci $CM = MB'$. În triunghiul $AA'M$, OB' fiind paralelă cu MA' va tăia și pe AM în două părți egale $AB' = B'M$. Rezultă $AB' = B'M = MC = \frac{1}{3} AC$.

Ducînd $A'N$ paralelă cu CC', ea va împărți și latura BC' a triunghiului BCC' în două părți egale $BN = NC'$.

În triunghiul $AA'N$, OC' fiind paralelă cu $A'N$ va împărți și pe NA în două părți egale, $NC' = C'A$ și rezultă $AC' = CN' = NB = \frac{1}{3} AB$.

Conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă că $B'C'$ este paralelă cu latura BC a triunghiului ABC.

b) Triunghiurile $OB'C'$ și OBC sînt asemenea și $3B'C' = BC$, deci aria $OB'C' =$ $=$ 9 aria OBC, însă aria $ABC = 2$ aria OBC.

Rezultă: aria $ABC = 18$ aria $OB'C'$.

15.51. Triunghiurile AND și BMD sînt asemenea fiind dreptunghice și $\sphericalangle DNA = \sphericalangle DBM$. Deci:

$$\frac{DB}{DN} = \frac{DM}{DA} \text{ sau } \frac{DB}{12} = \frac{3}{DB}, \text{ deci } DB = 6 \text{ cm},$$

$$AB = 2DB = 12 \text{ cm}.$$

15.52. Fie E și F intersecțiile dreptelor BB' și CC' respectiv cu dreapta ce trece prin A și este paralelă cu BC. Ținem seama că asemănarea perechilor de triunghiuri ($B'BC$ cu $B'AE$) și ($C'BC$ cu $C'AF$); de unde $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AE}{BC}$ și $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AF}{BC}$, însă $\frac{AE}{BC} + \frac{AF}{BC} = \frac{EF}{BC}$.

15.53. Din asemănarea triunghiurilor (CAM cu DAP) și (BCM cu EBP) rezultă

$$\frac{PD}{CM} = \frac{AP}{AM} = \frac{2AP}{AB} \text{ și } \frac{PE}{CM} = \frac{PB}{MB} = \frac{2BP}{AB}, \text{ de unde}$$

$$\frac{PD + PE}{CM} = \frac{2(AP + PB)}{AB} = \frac{2AB}{AB} = 2. \text{ Deci } PD + FE = 2MC.$$

15.54. Ducem diagonala AC care taie pe MN în punctul P. Avem în triunghiul ACD:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{m}{n} \text{ sau } \frac{MA}{MA + MD} = \frac{m}{m + n} = \frac{MA}{AD} = \frac{MP}{b},$$

deci $MP = \frac{bm}{m + n}$. Analog din triunghiul ABC se deduce

$$PN = \frac{an}{m + n}, \text{ deci:}$$

$$MN = \frac{an + bm}{m + n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

15.55. Fie triunghiul ABC și D piciorul înălțimii din A, $\measuredangle C = 15°$, E simetricul lui A față de D și F piciorul perpendicularei duse din E pe AC. Avem:

$$\measuredangle ACE = 30°;\ EF = \frac{1}{2}\ AC.$$

Din triunghiurile asemenea ABC și AEF rezultă:

$$\frac{BC}{AE} = \frac{AC}{EF},\ \text{apoi}\ AE = \frac{BC \cdot EF}{AC} = \frac{BC \cdot AC}{2AC} = \frac{BC}{2}.$$

Dar $AE = 2AD$, deci $AD = \frac{AE}{2} = \frac{BC}{4}$.

15.56. *Soluție. a)* Fie D și E punctele de contact ale cercului cu catetele. Figura $ADOE$ este un paralelogram $DO = OE$, iar AC și AB sînt perpendiculare. Diagonala AO a pătratului $ADOE$ este a bisectoarei unghiului DAE.

b) Din asemănarea triunghiurilor DOC și ABC avem $\frac{OC}{BC} = \frac{DO}{AB}$, iar din asemănarea triunghiurilor BOE și ABC deducem $\frac{BO}{BC} = \frac{OE}{AC}$, adunînd aceste două relații și ținînd seamă că $OD = OE = R$, obținem $\frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

15.57. Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = m$ și cum AB și CD sînt egale și paralele rezultă că $AM = CN$.

Prin urmare MD și BN sînt egale și paralele.

Din triunghiurile asemenea ASB și ARM, deducem $\frac{AR}{RS} = \frac{AM}{MB} = m$, deci $AR = m \cdot RS$.

Analog $\frac{SC}{RS} = \frac{CN}{ND} = m$, deci $SC = m \cdot RS$.

Din relația $AR + RS + SC = AC$ rezultă că $AC = (am + 1)RS$.

15.58. Figura $AEMD$ este un paralelogram avînd laturile opuse egale. Diagonalele DE și AM se taie deci în părți egale.

Notînd cu O intersecția acestora, avem $OE = OD$.

Patrulaterul $EGFD$ este un trapez, deoarece EG, AM, DF sînt paralele. Ținînd seama de acestea rezultă că paralela prin O la bazele trapezului taie pe GF prin mijloc, adică OM este linie mijlocie și deci $GM = MF$, ceea ce am avut de arătat.

15.59. Fie M mijlocul lui AB. Avem: $\measuredangle AB'M = \measuredangle B'AC$ ca unghiuri alterne interne. Dar $\measuredangle B'AC = \measuredangle B'AM$, AB' fiind bisectoare.

Rezultă $AM = BM = MB'$.

Deci $\measuredangle AB'B$ este un unghi înscris în semicercul $AB'B$, deci $\measuredangle AB'B = 90°$, iar AB' și BB' sînt perpendiculare.

Scanned with OKEN Scanner

15.60. *Soluție. a)* Avem $\sphericalangle F_1 = \sphericalangle A_1$ având același complement $\sphericalangle AFD$. Totodată $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle A_2$ având același complement $\sphericalangle AHD = \sphericalangle GHF$, unde $H \equiv (DC; AF)$, adică H este intersecția dreptelor DC și AF.

Dar cum $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ și comparînd cele două egalități deducem: $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle F_1$ adică triunghiul FEG este isoscel.

b) Trebuie să avem:

$\sphericalangle OAF + \sphericalangle AOD = 90°$ sau

$\sphericalangle AOD + \sphericalangle \frac{DAO}{2} = 90°$, dar mai avem și

$2 \sphericalangle DAO + \sphericalangle AOD = 180°$.

Rezolvînd acest sistem găsim:

$\sphericalangle OAD = \sphericalangle DAC = \sphericalangle AOD = 60°$.

Fig. 15.60.

15.61. *Soluție. a)* Avem $\frac{MQ}{OR} = \frac{MN}{RN}$ și $\frac{OR}{NP} = \frac{MR}{MN}$.

Prin înmulțire obținem:

$$\frac{MQ}{NP} = \frac{MR}{RN}. \qquad (1)$$

b) Din relația (1) deducem asemănarea triunghiurilor MRQ și RNP, de unde $\sphericalangle MQR = \sphericalangle RNP$. Dar $\sphericalangle MQR = \sphericalangle QRO$ și $\sphericalangle RNP = \sphericalangle RQP$.

Prin urmare $\sphericalangle QRO = \sphericalangle ORP$.

c) Din relația (1) avem $\frac{NR}{MN} = \frac{NP}{MR + NP}$; însă

$$RO = \frac{MQ \cdot NR}{MN} = \frac{MQ \cdot NP}{MQ + NP}.$$

Rezultă $\frac{1}{RO} = \frac{MQ + NP}{MQ \cdot NP} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{NP}$.

15.61.

Capitolul XVI

16.1. Mediana AM este cît jumătatea ipotenuzei, deoarece M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Cunoscînd ipotenuza și o catetă se construiește triunghiul.

Scanned with OKEN Scanner

16.2. Înălțimile sînt și mediane în triunghiul echilateral; iar medianele se taie la o treime de bază. Fie M și N mijloacele înălțimilor duse din A și B, iar H intersecția înălțimilor. Avem:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}; \text{ deci } MN = \frac{a}{3}.$$

16.3. Se arată mai întîi că suma distanțelor de la un punct interior la laturile triunghiului echilateral este egală cu înălțimea. Unghiul format de înălțimea din A cu latura AB fiind de 30°, construcția rezultă.

16.4. *Soluție. a)* Triunghiurile dreptunghice BAE și CBD sînt asemenea, deci $\frac{BE}{CD} = \frac{BA}{BC}$ sau $\frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BC}$;

$$BE = \frac{BA^2}{BC} = \frac{\frac{(BC)^2}{4}}{BC} = \frac{BC}{4}, \text{ deci } BC = 4BE.$$

b) În triunghiul dreptunghic OBE, punctul N este mijlocul lui BE și deci mediana $ON = \frac{BE}{2} = BN$, de unde $\sphericalangle NOB = \sphericalangle NBO$.

La fel în triunghiul dreptunghic ODA avem $\sphericalangle MOD = \sphericalangle MDO$.

În dreptunghiul $ABCD$ avem $\sphericalangle NPO = \sphericalangle MDO$, deci $\sphericalangle NOB = \sphericalangle MOD$, dar cum OB este în prelungirea lui OD, iar M și N de o parte și alta a dreptei BD rezultă că N, O, M sînt pe aceeași dreaptă.

16.5. Avem $9 \cdot 12 = AD \cdot CB$, unde $BC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. Rezultă $AD = \frac{108}{15}$. Apoi se verifică relația cerută știind că $BD^2 = AB^2 - AD^2$

și $DC^2 = AC^2 - AD^2$.

16.6. Avem

$$\frac{a+c}{b} + \frac{b}{a+c} = \frac{a^2 + c^2 + 2ac + b^2}{b(a+c)}.$$

Ținem seama că $b^2 + c^2 = a^2$, obținem

$$E = \frac{2a^2 + 2ac}{b(a+c)} = \frac{2a(a+c)}{b(a+c)} = \frac{2a}{b}.$$

16.7. Avem $AB^2 = BC \cdot BD$; $AC^2 = BC \cdot DC$;

$AD^2 = BD \cdot DC$. Prin înmulțire obținem

$AB^2 \cdot AD^2 \cdot AC^2 = BD^2 \cdot DC^2 \cdot BC^2$.

16.8. Notăm cu $4a$ și $5a$ lungimile bazelor, iar cu x distanța cerută.

Avem $\frac{x-4}{4a} = \frac{x}{5a}$; de unde $x = 20$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

16.9. Pentru a arăta direct geometric notăm cu M, N și P proiecțiile punctelor O, C, E pe AB. Avem:

$$\frac{OM}{EP} = \frac{1}{2}, \text{ iar } \frac{EP}{NC} = \frac{1}{2}, \text{ deci } \frac{OM}{MC} = \frac{1}{4}.$$

16.10. O paralelă dusă prin P taie pe AB și CD, respectiv în R și S.

$$a)\ \frac{PC}{AC} = \frac{SC}{a} = \frac{1}{4}, \text{ deci } SC = \frac{a}{4}.$$

$$b)\ \frac{ES}{SC} = \frac{EP}{PB} = \frac{PC}{PA} = \frac{1}{3}, \text{ deci } ES = \frac{SC}{3} = \frac{a}{12}.$$

$$EC = ES + SC = \frac{a}{12} + \frac{a}{4} = \frac{a}{3}.$$

Fie I proiecția lui E pe OM. Se arată că $OI = IM$,

$$\text{deoarece } OI = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6} \text{ și } IM = \frac{EC}{2} = \frac{a}{6}.$$

16.11. Triunghiurile dreptunghice DCM și BDN fiind asemenea cu triunghiul dreptunghic ABC avem:

$$\frac{CM}{CA} = \frac{DC}{BC};\ \frac{AB}{NB} = \frac{BC}{BD}.$$

Conform teoremei catetei avem:

$$DC = \frac{CA^2}{BC};\ BD = \frac{AB^2}{BC}, \text{ deci}$$

$\frac{CM}{CA} = \frac{CA^2}{BC^2}$ și $\frac{AB}{NB} = \frac{BC^2}{AB^2}$, unde aplicînd proprietăți ale proporțiilor deducem:

$$\frac{CM}{CA - CM} = \frac{CA^2}{BC^2 - CA^2};\ \frac{AB - NB}{NB} = \frac{BC^2 - AB^2}{AB^2}$$

sau

$$\frac{CM}{MA} = \frac{CA^2}{AB^2} \text{ și } \frac{AN}{NB} = \frac{CA^2}{AB^2}.$$

Fig. 16.11.

16.13. Se construiește un triunghi oarecare $AB'C'$ avînd $A = 65°$, $B = 35°$, $C = 80°$. Se duce mediana AM'. Pe mediana AM' se ia $AM = 4$ cm, apoi prin M se duce o paralelă la $B'C'$ care întîlnește pe AB' și AC', respectiv în B și C.

16.16. Se cunosc catetele triunghiului dreptunghic ABD. Fie I intersecția diagonalelor. AI este și înălțime în triunghiul ABD. Se calculează: BD, DI, IB, apoi $IC = AC - AI$. Laturile BC și DC sînt ipotenuze în triunghiurile dreptunghice BCI și CDI.

16.17. Dacă $0 < x < 90°$, atunci $\sin x > 0$.

16.18. Se înlocuiește $\operatorname{ctg} x$ prin $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Scanned with OKEN Scanner

16.21. Se foloseşte $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

16.24. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de contact. Avem: $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{AC_1} = \frac{r}{AB_1}$ etc.

$$AB = AC_1 + BC_1 = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

16.25. Vom arăta mai întîi că $S_{EAF} = 2S_{ABC}$.

Ducem segmentul EB. Triunghiurile FEB şi EAB au aceeaşi înălţime şi bazele egale $AB = BF$, deci $S_{ABF} = S_{EBA}$. Triunghiurile EAB şi ABC au înălţimea din B comună, iar bazele $EA = AC$.

Avem $S_{EAB} = S_{ABC}$; $S_{AEF} = 2S_{ABC}$.

Analog $S_{ECD} = 2S_{ABC}$ şi $S_{FBD} = 2S_{ABC}$.

Însă $S_{DEF} = S_{ABC} + 3 \cdot 2S_{ABC} = 7S_{ABC}$.

Fig. 16.25.

16.26. Cum PM şi DB sînt paralele rezultă că aria MPD = aria MPE şi analog aria NPC = aria NPE. Ţinînd seama că punctele E, M, N sînt coliniare şi adunînd relaţiile precedente obţinem relaţia cerută.

16.28. Un triunghi obţinut printr-o paralelă la o latură dusă la $\frac{1}{3}$ de vîrful opus determină triunghiul cerut.

16.30. Deoarece $AC = DC$ şi $BC = CE$, triunghiurile ACD şi BEC sînt isoscele. Deci $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ADC$ şi $\sphericalangle EBC = \sphericalangle CEB$.

Dar $\sphericalangle DCA + \sphericalangle ECB = 180°$. Rezultă:

$$\sphericalangle DAC + \sphericalangle EBC = 90°, \text{ deci } \sphericalangle AMB = 90°,$$

locul lui M este cercul descris pe AB ca diametru.

Fig. 16.30.

16.31. Se observă că $AH = AA_1 - HA_1$ unde AA_1 este înălţimea din A. Avem $BC \cdot AH = BC(AA_1 - HA_1) = 2S - 2$ aria BCH etc.

16.36. Linia mijlocie a trapezului fiind de 4 m rezultă că $BC = AD = 8$ m. Cum trapezul este circumscris cercului avem:

$$AD + BC = AB + CD = 2AB, \text{ de unde } AB = 4 \text{ m}.$$

Ducînd BE perpendiculară pe AD, în triunghiul dreptunghic, ABE, unghiul A fiind de 60°, unghiul $ABE = 30°$, atunci $AD = \frac{1}{2}AB = 2$ m şi $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$.

Cum BE cuprinsă între cerc şi trapez este

$$\frac{(AD + BC)BD}{2} - \pi R^2 = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - 3\pi = 4{,}436 \text{ m}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

16.37. Ducem înălțimea EF a trapezului $ABCD$ prin punctul O de intersecție a diagonalelor. Fiind un trapez isoscel ale cărui diagonale sînt perpendiculare înseamnă că triunghiurile BOC și AOD sînt dreptunghice isoscele. Deci, E și F sînt mijloacele laturilor BC, respectiv AD. Dar $EO = \frac{BC}{2}$ ca mediană dusă din vîrful unghiului drept. La fel $FO = \frac{AD}{2}$. Deci $EO + OF = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$; $EF = \frac{BC+AD}{2}$. Aria trapezului isoscel este:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot EF = \frac{(BC + AD)^2}{2} = EF^2.$$

16.38. Notăm cu a și b distanțele de la punctele A și B, respectiv la laturile DC și AC.

$$S_{DCE} = \frac{DC \cdot a}{2}; \quad S_{ABC} = \frac{AB \cdot a}{2} = \frac{DC \cdot a}{2},$$

deci $S_{DEG} = S_{ABC}$.

$$S_{DIC} = \frac{CI \cdot b}{2} \text{ și } S_{BIC} = \frac{CI \cdot b}{2},$$

deci $S_{DIC} = S_{BIC}$, scăzînd, avem

$$S_{DEC} - S_{DIC} = S_{ABC} - S_{BIC} \text{ sau}$$

$S_{CIE} = S_{AIB}$ și scăzînd din fiecare S_{GIF}:

$$S_{CIE} = S_{GIE} + S_{AIB} - S_{GIE} \text{ sau } S_{CIB} = S_{AEI} + S_{BEC}.$$

Fig. 16.38.

16.39. *a*) CA_1 este paralelă cu HB_1 și NC_1 este paralelă cu AB_1. Pe motive de simetrie $AC_1 = AB_1$ paralelogramul cu laturile egale este romb.

b) $\sphericalangle AB_1H = 60°$; AB_1 este egală și paralelă cu HC; $B_1C_1 = BC$.

Aria rombului AB_1HC_1 este $\frac{B_1C_1 \cdot AH}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2}$.

Aria triunghiului ABC este $\frac{1}{2} BC \cdot \frac{3}{2} AH$.

16.40. Se află aria trapezului. Înălțimea trapezului este $\sqrt{280^2 - 168^2}$. Se ține seama că un hectar are 10 000 m².

16.42. Lungimea cercului $L = 2\pi R$. Fie N numărul de învîrtituri făcute de roata mare în timp ce roata mică face n învîrtituri pe distanța parcursă. Avem:

$N + n = 32\,100$ și $90n\pi = 124N\pi$, deci $45n = 62N$;

$$32100 \cdot 45 = 1\,444\,500;$$

$$45(N + n) = 45N + 62N = 1\,444\,500;$$

$$N = 1\,444\,500 : 107 = 13\,500;$$

$$n = 32\,100 - 13\,500 = 18\,600.$$

Lungimea drumului este $S = 2\pi Rn = 3{,}14 \cdot 0{,}90 \cdot 18\,600 \approx 52\,563$ m.

Scanned with OKEN Scanner

16.51. *a*) În triunghiul ABB', avem $\measuredangle A'AB' = 30°$, iar din triunghiul dreptunghic $AA'C$ rezultă că $\measuredangle BCA = 60°$. Așadar, unghiurile triunghiului ABC, sînt $A = 40°$, $B = 80°$ și $C = 60°$.

b) Se știe că în triunghiul $AA'C$ avem $A'D = AD = DC$, deci triunghiul $AA'D$ este isoscel, adică $A'D = AD$ și atunci rezultă că $\measuredangle AA'D = 30°$. Triunghiul $A'DC$ este echilateral, deci $\measuredangle A'DC = 60°$ și cum triunghiul DNB' este dreptunghic, rezultă că $\measuredangle DNB = 30°$, adică $\measuredangle DNB' = \measuredangle AA'D$.

c) Triunghiul DAC este echilateral și atunci $\measuredangle DA'C = 60°$ și deci din triunghiul $A'ME$ rezultă că $\measuredangle A'ME = 30°$. Triunghiul EFD fiind dreptunghic și avînd unghiul D de 60° rezultă că $\measuredangle MFC = 30°$, prin urmare $\measuredangle CMF = \measuredangle MFC = 30°$, adică triunghiul MFC este isoscel.

16.52. *a*) Din asemănarea triunghiurilor ABD și BDN avem:

$$\frac{AB}{DN} = \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BN} \Rightarrow AD \cdot BN = BD^2. \tag{1}$$

Din asemănarea triunghiurilor DBN și ABD rezultă:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BM}{AD} = \frac{DM}{BD} \Rightarrow AB \cdot DM = BD^2. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$AD \cdot BN = AB \cdot DM \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BN}{AM}.$$

b) Din asemănarea triunghiurilor BDM și BDN avem:

$$\frac{BD}{DN} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow BD^2 = BM \cdot DN \tag{3}$$

Deci

$$AD \cdot BN = BM \cdot DN \Rightarrow \frac{AD}{DN} = \frac{BM}{BN}$$

și

$$AB \cdot DM = BM \cdot DN \Rightarrow \frac{AB}{DN} = \frac{BM}{DM}.$$

c) Cum $BD^2 = AB^2 + BC^2$, relația (3) devine: $AB^2 + BC^2 = BM \cdot DN$.

16.53. *a*) Avem: $\measuredangle AED = \measuredangle AFD = 90°$, deci patrulaterul $AEDF$ este inscriptibil. Observăm că triunghiurile dreptunghice AED și AFD sînt egale, deci $AE = AF$. Rezultă că în triunghi isoscel AEF, bisectoarea este și înălțime, adică AD și EF sînt perpendiculare (patrulaterul este ortodiagonal).

b) Deoarece $\measuredangle AED = \measuredangle AFD = 90°$, în cercul $AEDF$, AD este diametru. Tangenta BC este perpendiculară pe acest diametru, deci bisectoarea AD este perpendiculară pe latura BC, de unde rezultă că triunghiul ABC este isoscel (cu vîrful în A).

Scanned with OKEN Scanner

c) Am văzut că $AF = AE$ şi cum $EB = FC$ putem scrie $\frac{AE}{EB} = \frac{AE}{FC}$ deci conform reciprocei teoremei lui Thales EF şi BC sînt paralele.

Dar întrucît EF este perpendiculară pe AD rezultă că BC este perpendiculară pe AD, adică BC este tangentă cercului $AEDF$. Problema s-a redus în acest fel la punctul *b*), deci condiţia este ca triunghiul ABC să fie isoscel.

Capitolul XVII

17.1. 2,08(3)

17.2. Egalitatea celor două arii totale o vom scrie:

$$2ab + 2ac + 2bc = 2(a - 3x)\ (b + 2x) + 2(a - 3x)\ (c + x) + \\ + 2(b + 2x)\ (c + x);$$

sau $x(7x - 3a + 2b + c) = 0$.

Avem $x = 0$, paralelipipedul rămîne neschimbat, şi $x = \frac{3a - (2b + c)}{7}$, deci x trebuie să fie pozitiv ca $3a > 2b + c$.

17.3. Aria dreptunghiului de bază a acoperişului este $15 \cdot 6 = 90$ m². Înălţimile triunghiurilor şi trapezelor isoscele care formează acoperişul sînt egale între ele. Lăsînd perpendicularele din vîrfurile triunghiurilor isoscele pe baza acoperişului în M şi N pe care unindu-le cu $ABCD$ vîrfurile dreptunghiului de bază şi M cu N, obţinem dreptunghiul împărţit în 2 trapeze isoscele şi 2 triunghiuri isoscele cu înălţimile de cîte 3 m.

Raportul între ariile triunghiurilor isoscele ale acoperişului şi ale triunghiurilor isoscele din dreptunghiul de bază, la fel şi pentru trapeze este egal şi cu raportul înălţimilor respective, adică $\frac{90}{120} = \frac{3}{x}$; $x = 4$ m înălţimea triunghiului isoscel format pe acoperiş.

17.4. Avem 25 m = 25 000 mm

$$1 \text{ dm} = 100 \text{ mm},\ r = 50 \text{ mm}^2$$

$$25\,000 \cdot 0{,}1 = \pi(50^2 - x^2) \text{ mm}^2,$$

$$\frac{2\,500}{3{,}14} = 2\,500 - x^2;\ x = \sqrt{1\,704} = 41{,}28 \text{ mm}$$

diametrul cerut este 82,5 mm = 8,25 cm.

17.5. Aria coroanei este $\pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

17.6. Lungimea unei spire este $650 \cdot 3{,}14 = 2\,041$ mm.

$$288 \text{ m} = 28\,800 \text{ mm}; \quad n = \frac{28\,800}{2\,041} \approx 14 \text{ spire.}$$

17.7. Avem $lg = \frac{\pi d^2}{4} - \pi r^2$, de unde

$$d = 2\sqrt{\frac{lg + \pi r^2}{\pi}}$$

Aplicație.

$$d = \sqrt{\frac{5\,000 \cdot 0{,}157 + 3{,}14 \cdot 4}{3{,}14}} = 2\sqrt{256{,}56} \approx 32 \text{ cm.}$$

17.8. Se observă că dacă avem un număr impar de cercuri concentrice lungimea tuturor cercurilor este egală cu lungimea cercului mijlociu înmulțite cu numărul cercurilor. Avem:

a) $L = 2R_m \cdot N = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 40{,}2 \cdot 29 \approx 73{,}21$ m.

Volumul $V = 0{,}2 \cdot 5 \cdot 7\,321 = 7\,321$ cm^3.

Masa este $7\,321 \cdot 7{,}6 \approx 55{,}640$ kg.

17.9. Fie x raza cercului de bază al conului $\pi x^2 = 12{,}56$; $x^2 = \frac{1\,256}{314} = 4$, $x = 2$ m. Fie h înălțimea conului $h = 2 \operatorname{tg} 31°$. Rezultă volumul $V = \frac{12{,}56 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} 31°}{3}$ și masa

$$M = 1{,}67\ V = 8{,}390 \text{ tone.}$$

17.10. Fie G_1, R_1, I_1 și G_1, R_2 și I_2 respectiv generatoarele, razele și înălțimile conurilor la care generatoarele lor fac cu planul bazei unghiurile 45° și 30°. Avem $S_1 = \pi R_1 G_1 = \pi R_2 G_2$, deci $R_1 G_1 = R_2 G_2$. Observăm că $I_2 = \frac{G_2}{2}$, $I_1 = R_1 = G_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$; $R_2 = \sqrt{G_2^2 - I_2^2} = G_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1}.$$

De unde $\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 = \sqrt{6}$; deci $\frac{I_1}{I_2} = \sqrt[4]{6}$;

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{G_2}{G_1} = \frac{I_2\sqrt{2}}{I_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}; \quad \frac{G_1}{G_2} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$$

17.11. Raportul $\frac{V}{v} = \frac{400^3}{1} = 64\,000\,000$.

17.12. Înălțimea prismei este 2 dm.

17.13. Diametrul sferei este 6,25 dm.

Scanned with OKEN Scanner

17.15. Raza bazei este $R = \frac{60 \cdot 80}{100} = 48$ cm.

Volumul $V = \frac{\pi R^2 \cdot 100}{3} \cong 242$ dm³.

17.16. Avem: $S = \pi G(R + r) + \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 50 \cdot 32 + 3{,}14 \cdot 144 = 950{,}56$ cm². Pentru 100 găleți este necesar 9,5 m² tablă.

17.17. Fie r raza cercului de secțiune. Avem $r^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8R^2}{9}$.

Aria secțiunii este $\pi R^2 = \frac{8\pi R^2}{9}$.

17.19. Volumul Lunii este de $1 : 0{,}27^3 \cong 50$ ori mai mic decît al Pămîntului.

17.20. Aria acoperișului este $84\sqrt{2}$ m² $\approx 118{,}44$ m², înălțimea podului fiind de 3 metri.

Sînt necesare 830 țigle.

17.21. Avem: $(2R)^2 = a^2 + a^2 + a^2$, de unde $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $r = \frac{a}{2}$. Raportul este $\frac{R^2}{r^2} = 3$.

Capitolul XVIII

18.1. $52°3' = 30° + \frac{45°}{2}$, iar 30° și 45° se construiesc ducînd bisectoarele unghiurilor de 60° și 90°.

18.2. Avem: $AC_1 = AC + CB$ sau $AB + BC_1 = AC + AB$; $BC_1 = AC + CB - AB$; $BA_1 = AB + AC$; $BC + CA_1 = BA + BC$; $CA_1 = AB + AC - BC$ și apoi

$$AB_1 = CB + BS - CA.$$

Din triunghiul A_1CB_1 avem:

$A_1B_1 < CA_1 + CB_1$ sau înlocuind pe CA_1 și CB_1 cu valorile lor avem: $A_1B_1 < BA + AC - BC + BC + BA$ sau $A_1B_1 < 2AB + AC$.

La fel, din triunghiul B_1AC_1 avem:

$B_1C_1 < AB_1 + AC_1$ sau $B_1C_1 < BC + AB - CA + AC + BC$, deci $B_1C_1 < 2BC + AB$; iar din triunghiul A_1BC_1 vom deduce $A_1C_1 < 2AC + BC$. Rezultă $A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 < 3(AB + BC + CA)$ sau $P_1 < 3P$. Observăm că $B_1C + CA_1 < B_1C_1 + A_1C_1$ și înlocuind pe B_1C și CA_1 cu valorile găsite mai sus, avem: $2AB + AC < B_1C_1 + A_1C_1$ și analog:

$$2AC + BC < B_1C_1 + B_1A_1 \text{ și } 2BC + AB < A_1B_1 + A_1C_1$$

Scanned with OKEN Scanner

și prin adunare rezultă

$$3(AB + BC + AC) < 2(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1).$$

18.3. Fie M și N intersecțiile cu AC. Figura $DEBF$ este un paralelogram, deci ME și BN sînt paralele. $AM = MN$, iar din triunghiurile asemenea DCM și FCN rezultă $NC = \frac{CM}{2} = MN$, deci $AM = MN = NC$.

18.4. Fie a și b lungimile laturilor și h_a și h_b înălțimile respective. Avem $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$. Dacă unghiul ascuțit este de 30°, rezultă că $b = 2h_a$, sau $a = 2h_b$.

Dar dacă $\frac{h_a}{h_b} = \frac{2}{3}$ avem

$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$, adică $2a = 3b$ însă $(a + b)2 = 40$ cm, deci $a + b = 20$.

$$a = 12 \text{ și } b = 8 \text{ cm}, \; h_a = 4 \text{ cm}$$

$$S = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2.$$

18.5. Avem $S = \frac{AA' \cdot a}{2} = \frac{bc}{2}$, de unde $AA' = \frac{bc}{a}$. Din triunghiurile dreptunghice asemenea $BB'C$ și ABC cu unghiul comun C, avem $\frac{BB'}{a} = \frac{c}{b}$, deci $BB' = \frac{ac}{b}$.

Idem, triunghiurile BCC' și ABC sînt asemenea.

$$\frac{CC'}{a} = \frac{b}{c}, \text{ deci } CC' = \frac{ab}{c}.$$

18.6. Avînd cunoscută latura poligonului regulat cu S laturi înscris într-un cerc de rază R, cunoaștem unghiul la centru de $\frac{360}{5} = 72°$.

Mai ținem seama că $123 = 72 + 36 + 15$, unde $36 = \frac{72}{2}$ și $15 = \frac{30}{2} = \frac{60}{4}$, se adună unghiurile prin construcție grafică.

18.7. Dacă triunghiul este echilateral diferența a două unghiuri este zero deci mai mică decît 30°. Fie $A > B > C$; $A + B + C = 180°$. Prin urmare $A > 60°$; triunghiul avînd toate unghiurile ascuțite $A < 90°$, deci $60° < A < 90°$. Să presupunem că $A - B \geqslant 30°$. Fie $A = 60 + \alpha$, unde $0 < \alpha < 30°$. Rezultă $B \leqslant 30° + \alpha$; dacă și $B - C \geqslant 30°$, atunci $C \leqslant \alpha$.

Însă $A + B + C = 180°$ sau $60 + \alpha + 30° + \alpha + \alpha \geqslant 180°$ sau $3\alpha \geqslant 90°$ sau $\alpha \geqslant 30°$, ceea ce este imposibil întrucît $\alpha < 30°$.

18.8. Fie E intersecția dreptelor AD și BC. Notăm $DM = a$, $MA = b$, $AE = c$, $EB = d$, $BN = e$ și $NC = f$. Avem

$$\frac{b}{f} = \frac{c}{d + e} \text{ și } \frac{a + b}{e + f} = \frac{c}{d}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta că ND şi MB sînt paralele trebuie să arătăm că $\frac{b+c}{b} = \frac{a}{c}$. Din primele două egalităţi avem:

$$bd + be = cf \text{ şi } ad + bd = ec + cf \text{ sau } ad + bd = ec + (bd + be),$$

deci $ad = ec + bc$; $ad = e(b + c)$; $\frac{b+a}{d} = \frac{a}{2}$, ceea ce trebuia arătat.

Fig. 18.8.

18.9. Fie A şi B cele două puncte fixe pe cerc. Presupunem problema rezolvată. Fie AA' şi BB' cele două coarde paralele unde $AA' + BB' = 2l$. Linia mijlocie $CC' = l$. Ţinem seama că $OC = OC'$.

Construcţia. Punctul C' se află la intersecţia cercului de rază 1 şi centru C cu cercul de rază OC şi centru O.

AA' şi BB' sînt paralele cu CG'.

18.10. Unim pe B cu G şi notăm cu I intersecţia dreptelor AE cu BG. Cum $AO = BO$ şi GE paralelă cu AB, rezultă că $AGEB$ este un trapez isoscel.

Totodată unghiul $BAF = 45°$, deci $\sphericalangle AIB = 90°$, deoarece triunghiul AIB este isoscel. De aici rezultă că IF şi BG sînt perpendiculare.

Cum GE şi AB sînt paralele şi AB şi BC sînt perpendiculare rezultă că GE şi BF sînt perpendiculare.

Prin urmare E este ortocentrul triunghiului BGF, deci GF şi BD sînt perpendiculare.

Fig. 18.10

18.11. *Soluţie. a)* $\sphericalangle ACB = 2 \sphericalangle MCB = \sphericalangle CMN = \sphericalangle BMN$.

Rezultă $B = 180° - 2C - \frac{C}{2} = 180° - \frac{5C}{2}$.

Însă dacă triunghiul este isoscel cu vîrful în C, atunci $A = B$ şi $A + B + C = 180°$ sau

$$2\left(180° - \frac{5C}{2}\right) + C = 180°,\ C = 45°,\ A = B = \frac{135°}{2}.$$

b) Dacă $A = 90°$, atunci $B + C = 90°$ sau $180° - \frac{5C}{2} + C = 90°$, deci $C = 60°$, $B = 30°$.

Discuţie. Avem $B = 180° - \frac{5C}{2} > 0$, deci $C < 72°$, deci nu poate fi dreptunghic în C.

Dacă $B = 90° = 180° - \frac{5C}{2}$ rezultă $C = 36°$, $A = 54°$.

Observare. Dacă $A = C$, avem $A + C + 180° - \frac{5C}{2} = 180°$, ceea ce nu este posibil.

Scanned with OKEN Scanner

18.12. BE fiind bisectoare, $\sphericalangle CBE = 45°$, însă $\sphericalangle EBD = 15°$, deci $\sphericalangle CBD = 60°$ și rezultă că $\sphericalangle ABD = 30°$. Triunghiul OBC este echilateral, iar triunghiul BCE este isoscel, deci $OC = OB = BC = EC$, adică triunghiul COE este isoscel.

$\sphericalangle COE = \sphericalangle OEC = \frac{180 - 30}{2} = 75°$, însă și

$\sphericalangle OPE = \sphericalangle BPC = 180 - 45 - 60 = 75°$, deci și triunghiul POE este isoscel.

18.13. Considerăm problema rezolvată. Fie triunghiul dreptunghic căutat ABC cu unghiul drept în A, în care se cunosc $\sphericalangle ABC$ și segmentul DE, care reprezintă distanța între piciorul înălțimii și piciorul bisectoarei duse din vîrful A.

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle CAE - \sphericalangle CAD = 45° - \sphericalangle ABC, \text{ deoarece}$$

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC \text{ avînd laturile perpendiculare}$$

$$\sphericalangle AED = 90° - (45° - \sphericalangle ABC) = 45° + \sphericalangle ABC.$$

Deci construcția triunghiului dreptunghic ABC se reduce la construcția triunghiului dreptunghic DAE format de înălțimea AD, bisectoarea AE și segmentul DE.

Construcție. Luăm pe o dreaptă segmentul DE. În punctul D ridicăm o perpendiculară, iar în punctul E construim un unghi avînd o latură DE, $\sphericalangle DEC = 45° + \sphericalangle ABC$. Punctul de intersecție A este între perpendiculara dusă în D pe DE și a doua latură a unghiului construit. Din A construim $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC$, vîrful C fiind pe prelungirea segmentului DE. Unghiul CAB fiind de 90°, vîrful fiind și el pe prelungirea segmentului DE.

18.14. *a)* $B = C = \frac{A}{2}$ sau $A = 2B = 2C$,

$A + B + C = 180°$; $2B + B + B = 180°$, deci $B = 45°$,

$C = 45°$ și $A = 90°$.

b) $\sphericalangle CDB = 90° - 45° = 45°$, triunghiul BCD este isoscel și deci $BC = CD$, iar $AD = AB$, întrucît AC este și mediană în triunghiul BCD.

c) AA_1CD este un trapez, iar BF este mediană în triunghiul BCD.

18.15. Triunghiurile ADC și ABC sînt egale, avînd o latură AC comună și cele două unghiuri alăturate respectiv egale. Deci $\sphericalangle B = \sphericalangle D$. Dacă $\sphericalangle A = 70°$, atunci $\sphericalangle C = 180° - 70° = 110°$, întrucît $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$.

$\sphericalangle DCE = 180° - 110° = 70°$, iar $\sphericalangle E = 90° - 70° = 20°$.

18.16. Fie MP perpendiculara din M pe dreapta CD. Distanța MP este distanța cerută fiind și înălțime în triunghiul CDM.

Aria trapezului $ABCD$ este $\frac{(22 + 17)12}{2} = 234$ m².

Aria triunghiului BCM este $\frac{17 \cdot 6}{2} = 51$ m².

Scanned with OKEN Scanner

Aria triunghiului ADM este $\frac{22 \cdot 6}{2} = 66$ m^2.

Deci aria triunghiului CDM este $234 - 51 - 66 = 117 = \frac{CD \cdot MP}{2}$.

$CD = \sqrt{(22 \cdot 17)^2 + 12^2} = 13$. Rezultă $MP = \frac{234}{13}$ metri.

18.17. Deoarece $AC' = CB'$ și $AC = BC$, avem

$$\sphericalangle C'AC = \sphericalangle B'CB,$$ triunghiurile $AC'C$ și $B'CB$

sînt egale avem $\sphericalangle AC'C = \sphericalangle BB'C$, iar unghiurile $AC'M$ și $AB'M$ sînt suplementare. Rezultă:

$$\sphericalangle CMB = \sphericalangle CMB' = 180° - \sphericalangle BAC = 120°.$$

Locul geometric al lui M este un cerc care trece prin centrul O al triunghiului ABC și prin vîrfurile B și C. Analog pentru punctele N, P.

18.18. $MN = 4 \sin 60° = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$;

$BN = 4 \cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$; $CN = 8 - 2 = 6$;

$PN = 6 \sin 60° = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$; $PC = 6 \cos 60° = 6\frac{1}{2} = 3$;

$PA = 8 - 3 = 5$; $PQ = 5 \sin 60° = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$AQ = 5 \cos 60° = 2{,}5$; $QM = 4 - 2{,}5 = 1{,}5$ m.

18.19. Deoarece înălțimea este egală cu diametrul cercului, suma bazelor este $20 \cdot 2 : 4 = 10$ cm. Într-un patrulater circumscris unui cerc, suma a două laturi egale opuse este egală cu suma celorlalte două laturi opuse. Prin urmare lungimea unei laturi din cele egale este $10 : 2 = 5$ dm. Baza mare întrece baza mică cu de două ori segmentul x dat de relația $x^2 = 5^2 - 4^2 = 9$; $x = 3$; $2x = 6$, $(10 - 2x) : 2 = 4 : 2 = 2$ cm. Baza mică este 2 cm, baza mare este 8 cm.

18.20. $\sphericalangle ACM = 90°$; $\sphericalangle BCN = 90°$.

Deoarece $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCN$, rezultă arc AM = arc BN, atunci dreptele AB și MN sînt paralele.

BM este diametru, deci $BM = 40$ cm.

$CM = \sqrt{40^2 - 32^2} = 24$. Fie x înălțimea dusă din C în triunghiul dreptunghic BCM, avem $4x = 32 \cdot 24 = 19{,}2$ m.

Perimetrul este 96 cm și înălțimile 32, 24 și 19,2 cm.

18.21. Cercul cu centrul în D și rază AD taie baza DC în x, iar cercul cu centrul în C și rază CB taie baza DC în y. Ax și By se taie în I. Paralela dusă prin I la DC întîlnește pe AD și BC în M și N.

Scanned with OKEN Scanner

18.22. Triunghiurile MNP şi MNQ sînt egale şi isoscele. Se arată care laturi sînt egale şi care unghiuri sînt egale între ele.

18.23. *a*) $\sphericalangle DOE = 90°$, deci cercul cu diametrul DE trece prin O.

b) $\sphericalangle AOE = \sphericalangle DOA = 45°$, $\sphericalangle ADE = \frac{45°}{2} = 22°30'$; $\sphericalangle AED = 22°30'$; $\sphericalangle EAF = 45°$, însă $\sphericalangle DEF = 90°$, deci $\sphericalangle AEF = 45°$ sau $AF = FE$.

c) $R = 5$ m, $DE = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Fie I intersecţia lui AB cu DE. Avem $OI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$; $AI = R - OI = 5 - 5\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5(2-\sqrt{2})}{2}$;

$$AE = \sqrt{AI^2 + IE^2} = \sqrt{\left[\frac{5(2-\sqrt{2})}{2}\right]^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{4+2-4\sqrt{2}+2} =$$

$$= 5\sqrt{2-\sqrt{2}}; \quad AF = FE = AE\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}.$$

18.24. 7 m = 7 000 mm; $\frac{7\,000}{9}$ exprimă cîte rotaţii sînt necesare.

180 rotaţii pe minut, arată că sînt $\frac{180}{60} = 3$ rotaţii pe secundă. Vor fi necesare $\frac{7\,000}{9} : 3$ secunde $= \frac{7\,000}{27} = 255{,}(5)$ secunde $= 4$ minute $15{,}(15)$ secunde.

Într-o secundă, un dinte parcurge

$$3 \times 2 \times 3{,}14 \times 46 = 866{,}64 \text{ cm sau } v = 8{,}666 \text{ m/s}.$$

18.25. *a*) Laturile patrulaterului sînt egale şi paralele două cîte două şi egale cu diagonala cu care sînt paralele. Trapezul fiind isoscel, diagonalele lui sînt egale, deci patrulaterul este un romb.

b) Unghiul ascuţit format de diagonalele trapezului fiind de 60° şi rombul va avea două unghiuri opuse de cîte 60° şi deci rombul se poate despărţi în două triunghiuri echilaterale a căror latură este egală cu laturile rombului şi deci cu diagonala trapezului.

18.26. Să exprimăm viteza de tăiere în milimetri pe secundă. În 60 secunde face 360 ture, deci $360 : 60 = 3$ ture pe secundă. Viteza de tăiere este $v = 3\pi$; $12 = 36\pi$ mm/s.

18.27. *Soluţia I.* Fie trapezul $ABCD$, unde $AB = a$, $CD = 3a$ şi înălţimea $AE = 2a$. Notăm cu I intersecţia diagonalelor. Avem $DA = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$, $AI = IB$.

Dacă $\sphericalangle AIB = \sphericalangle AID = 90°$, atunci $AI = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $DI = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

$AI^2 + DI^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{18a^2}{4} = \frac{20a^2}{4} = 5a^2$, însă s-a calculat $DA = a\sqrt{5}$ ceea ce verifică, prin urmare şi $\sphericalangle AID$ este drept. Dacă $\sphericalangle AIB = 90°$, atunci $\sphericalangle AID > 90°$ şi am fi avut $AI > a\frac{\sqrt{2}}{2}$; $DI > \frac{3a\sqrt{2}}{2}$, iar $AD > a\sqrt{5}$ şi invers.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția a II-a. Avem:

$$\frac{DI}{AI} = \frac{3a}{a} = 3,\ DB = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}\cdot a.$$

De unde $AI = \frac{DB}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = IB$. Aplicînd teorema lui Pitagora $AI^2 + IB^2 = AB^2$ se verifică, deci $\sphericalangle AIB = 90°$

18.28. Fie $AC > AB$. Din B ducem paralela la B_1C_1 care taie pe AE în I pe dreapta CC_1 în L.

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle IBE$, avînd laturile perpendiculare.

Triunghiurile dreptunghice BIE și ADE sînt egale fiindcă avem $AE = BE$. Deci $DE = IE$. Însă IE fiind linie mijlocie în triunghiul BCL avem $LC = 2IE$ sau $CC_1 + C_1L = 2IE$, însă $LC_1 = BB_1$, deci $2DE = BB_1 + CC_1$.

18.29. Pe minut sînt $15 \times 60 = 900$ ture. Lungimea circumferinței polizorului este $\frac{1\,000}{900} = \pi d$; deci

$$d = \frac{1\,000}{900\pi} = \frac{1\,000}{900 \times 3{,}14} \text{ metri.}$$

18.30. Avem $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DBE$. Triunghiurile dreptunghice BDC și ABO sînt asemenea $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{BE} = 2$, însă $AB = DC$.

$BC = 2DC = 2AB$ și $AB = 2BE$, deci $BC = 4BE$.

Fie M mijlocul segmentului BE și N intersecția dreptei OM cu AD. Triunghiurile BOM și NOD sînt asemenea și MOE este asemenea cu AON avînd același raport de asemănare cu $\frac{OM}{NO}$; deci $\frac{BM}{ND} = \frac{ME}{AN}$, rezultă $AN = ND$.

18.31. Se prelungește $AM = MD$. Prin D se duc paralele la celelalte laturi ale celor două unghiuri care intersectează aceste laturi în punctele B și C. Figura $ABCD$ este un paralelogram, deci $BM = MC$.

18.32. *a*) Fie AP perpendiculara pe BC. Triunghiurile ABD și ACE sînt egale respectiv cu ABP și APC care sînt asemenea cu triunghiul ABC.

b) $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$$5AP = 3 \cdot 4 + AP = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ cm. } BP = \sqrt{9 - 2{,}4^2} \text{ și}$$

$$PC = \sqrt{16 - 2{,}4^2}.$$

c) DC și AC sînt paralele și egale. Triunghiurile ABC, DGE sînt egale, deci $GE = AB$, unghiul $DGE = 90°$, adică GE și AC sînt perpendiculare.

d) Aria $ALGM = DA \cdot AP$ exprimate la punctul *a*.

18.33. $\sphericalangle AMD = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle CAD$.

$\sphericalangle DOM$ este egal cu unghiul opus la vîrf și egal cu $90 - \frac{1}{2}\sphericalangle CAD$. Deci $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DOM$, adică triunghiul DOM este isoscel.

Scanned with OKEN Scanner

18.34. M este centrul de greutate al triunghiului BOC, deci $OM = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}$.

Pe de altă parte din egalitatea triunghiurilor CEP și OMP, rezultă $CE = OM$, deci $CE = \frac{a}{3}$. Ținînd seama că patrulaterul $OMCE$ este paralelogram, rezultă $OE = MC = MB = ME$.

18.35. *a)* Fie C_1 și B_1 mijloacele laturilor AB și AC. Triunghiurile PAC_1 și C_1BM sînt egale. Triunghiurile QAB_1 și MB_1C sînt egale. AP și AQ sînt paralele cu BC, deci PA și AQ sînt în prelungire.

b) $PA = BM$ și $AQ = MC$, $PA + AQ = BM + MC$.

c) Dacă M este pe segmentul BCM avem:

$PC_1 = C_1M$ și $C_1A = BC_1$. Dacă M este piciorul înălțimii din A figura $AMBP$ este dreptunghi și diagonalele AB și MP sînt egale, idem $AC = MQ$ și deci triunghiurile MPQ și ABC sînt egale. Idem, dacă punctul M este la mijlocul lui BC.

18.36. Fie AA_1 înălțimea. Avem $AA_1 \cdot BC = AC \cdot AB$, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$. Distanțele de la mijlocul laturii BC la AB respectiv AC sînt $\frac{35}{2}$ și $\frac{120}{2}$. Distanțele de la M centrul de masă la AC și la AB sînt respectiv $\frac{35}{3}$ și $\frac{120}{3}$.

18.37. Fie I intersecția diagonalelor. Notăm $AI = a$, $BI = b$, $CI = c$, $DI = d$. Diagonalele fiind perpendiculare avem:

$$a^2 + b^2 = AB^2;\ a^2 + d^2 = AD^2;\ c^2 + d^2 = DC^2;\ BC^2 = b^2 + c^2.$$

Ducem din B perpendiculara BP pe DC și avem $BC^2 = PC^2 + BP^2 = PC^2 + AD^2$.

Mai avem $PC = DC - AB = c^2 + d^2 - a^2 + b^2$.

Relația $b^2 + c^2 = BP^2 + PC^2$ devine

$$b^2 + c^2 = (a^2 + d^2) + (\sqrt{c^2 + d^2} - \sqrt{a^2 + b^2})^2,$$

$$b^2 + c^2 = a^2 + d^2 + c^2 + d^2 + c^2 + b^2 - 2\sqrt{(c^2 + d^2)(a^2 + b^2)},$$

$$a^2 + d^2 = \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \text{ sau}$$

$AD^2 = DC \cdot AB$. Mai avem

$BD^2 = AB^2 + AD^2$ sau ținînd seama de relația $AD^2 = DC \cdot AB$ obținem $BD^2 = AB(AB + DC)$, iar relațiile: $AC^2 = AD^2 + DC^2$ și $AD^2 = AB \cdot DC$ ne dă: $AC^2 = AB \cdot DC + DC^2 = DC(AB + DC)$.

Împărțim relațiile $BD^2 = AB(AB + DC)$ și

$$AC^2 = DC(AB + DC) \text{ și obținem}$$

$$\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{AB}{DC} \text{ sau } BD^2 \cdot DC = AC^2 \cdot AB.$$

Scanned with OKEN Scanner

18.39. Fie $ABCDEF$ hexagonul regulat care este înscris într-un cerc de centru O. Considerăm trapezul $ABCF$. Bisectoarele trapezului sînt AO, BO, CA, FB, iar $AB = BC = FA = FC : 2 = a$.

Fie I intersecţia lui AC cu BF, P intersecţia lui AO cu BF, Q intersecţia lui BO cu AC. $ABOF$, $ABCO$ sînt romburi şi deci P şi Q fiind mijloacele segmentelor BF şi AC, PQ este linie mijlocie în triunghiul OAC, deci $QP = a : 2$. Cum OI este mediană în triunghiul isoscel FIC, rezultă că OI este perpendiculară pe FC. La fel M fiind mijlocul segmentului AB, IM este perpendiculară pe AB.

$\frac{IO}{IM} = \frac{FC}{AB} = \frac{2}{1}$; $IO = 2IM$; dar $IO + IM = OM$, deci $IO = \frac{2}{3} OM$. Se constată că aria OPQ este o treime din aria triunghiului echilateral OAB, iar aria triunghiului OAB este o treime din aria trapezului dat. Deci aria trapezului este de 9 ori aria $OPQL$.

Mai avem

$$OM = \sqrt{a^2 = \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad OI = \frac{2}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$OQ = OP = \frac{a}{2}; \quad IP = IQ = \frac{1}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Deoarece PQ este paralelă cu AB, iar OI este perpendiculară pe AB, rezultă că diagonalele PQ şi OI sînt perpendiculare.

18.40. Cercul simetric cercului de centru O_1 faţă de punctul T taie cercul de centru O_2 în A şi B. Secanta AB determină coarde egale în cele două cercuri.

18.41. Fie D al doilea punct de intersecţie a cercurilor de diametre AB şi AC. Avem $\sphericalangle ADB = 90°$; $\sphericalangle ADC = 90°$, deci BD şi DC sînt în prelungire.

18.42. Se înlocuieşte semiperimetrul p în funcţie de laturi. Avem

$$p = \frac{a+b+c}{2}; \quad p - a = \frac{-a+b+c}{2}; \quad p - b = \frac{a-b+c}{2} \text{ şi } p - c = \frac{a+b-c}{2}.$$

Efectuînd calculele rezultă relaţia cerută.

18.43. Notăm cu a, b, c laturile triunghiului. Avem: $ax = by = cz = S$ şi $p = \frac{a+b+c}{2}$; deci $p = \frac{x+y+z}{2S}$. Înlocuind pe p, relaţia devine identitate.

18.44. Avem $A = 20° + \frac{C}{2}$; $B = 2C - 50°$, $A + B + C = 180°$. Rezultă $C = 60°$, $A = 50°$, $B = 70°$.

18.45. Fie x înălţimea triunghiului. Avem

$$\frac{x}{16} = \frac{x - 7{,}5}{12}, \text{ de unde } x = 30 \text{ cm}. \quad S = \frac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2.$$

18.46. Fie x baza mare. Avem: $\frac{15+x}{2}=20$; de unde $x=25$ cm. Aria trapezului este $\frac{(25+15)(25-13)}{2}=240$ cm². Lungimea laturii neparalele este $\sqrt{12^2+\left(\frac{25-15}{2}\right)^2}=\sqrt{169}=13$. Perimetrul este 66 cm.

18.47. Fie A intersecţia laturilor neparalele şi x distanţa de la A la baza mică. Avem: $\frac{x}{2}=\frac{x+0{,}96}{3{,}2}$; de unde $x=0{,}8$ km. Notăm cu y distanţa dintre baza mică şi şanţ. Avem: $\frac{0{,}8}{2}=\frac{0{,}8+y}{2{,}5}$ de unde $y=0{,}2$ km $=200$ m. Distanţa între şanţ şi baza mare este $960-200=760$ metri.

18.48. Printr-un vîrf de la baza mică ducem paralelă la latura neparalelă opusă şi notăm cu x lungimea segmentului care desparte cele două tarlale. Avem:

$$\frac{8{,}75}{32-22}=\frac{8{,}75-2{,}1}{x-22},\text{ de unde } x=29{,}93 \text{ hm}.$$

Aria de partea bazei mici este de 172,1780 ha, iar aria de partea bazei mari este de 65,0265 hectare.

18.49. Notăm cu O intersecţia diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Punctul E fiind mijlocul lui CB înseamnă ca OE este paralelă cu AB. Din asemănarea triunghiurilor AMF şi MOE avem

$$\frac{MA}{MO}=\frac{AF}{OE},\text{ însă } CD=2OE,\text{ deci } \frac{MA}{MO}=\frac{2AF}{CD}=\frac{AG}{CD} \qquad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor ANG şi DNC avem:

$$\frac{NA}{ND}=\frac{AG}{DC} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă $\frac{MA}{MO}=\frac{NA}{ND}$, deci MN şi DO sînt paralele, iar triunghiurile DOA şi AMN sînt asemenea. Triunghiul AMN fiind isoscel rezultă $AM=MN$.

18.50. Figura $MPBQ$ fiind prin construcţie paralelogram, avem $\sphericalangle MPB=\sphericalangle MQB$ şi cum $MP=BQ=QQ'$, iar $MQ=PB=PP'$ rezultă că triunghiurile MPP', MQQ' sînt egale căci şi $\sphericalangle MPP'=\sphericalangle MPB+90°$, iar $\sphericalangle MQQ'=\sphericalangle MQB+90°$. Prin urmare $MP'=MQ'$. La fel pentru celelalte egalităţi. Aria $ABCD=2$ aria $PQRS$.

18.51. Dacă BN este 4/9 din BC, atunci NC este 5/9 din BC. Rezultă că ariile triunghiurilor ABN şi ACN cu aceeaşi înălţime, sînt 4/9 şi respectiv 5/9 din aria triunghiului ABC. Aria patrulaterului $AMNP$ este suma ariilor triunghiurilor AMN şi APN. Aria triunghiului AMN este $\frac{3}{8}$ din aria triunghiului ABN, sau $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$ din aria triunghiului ABC. Aria triunghiului APN completează 30%

din aria triunghiului ABC, adică $\frac{30}{100} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ din aria triunghiului ABC, sau $\frac{2}{15} : \frac{5}{9} = \frac{6}{25}$ din aria triunghiului ACN. Rezultă că segmentul AP este $\frac{6}{25}$ din latura AC şi deci punctul P se fixează pe latura AC la $\frac{6}{25}$ de la vîrful A.

18.52. Aria totală este 192 m² volumul este 144 m³ şi diagonala este de 13 metri.

18.53. Linia mijlocie a trapezului este 1 400 mm. Volumul este $\pi R^2 I = 3{,}14 \times \times 100^2 \cdot 1\,400 = 43\,960$ cm³.

18.54. Volumul este dat de formula

$$V = \frac{\pi I(B + b + \sqrt{Bb})}{3}, \text{ unde } \pi = 3{,}14,\ I = 20 \text{ m},\ B = 3 \text{ m}^2,\ b = 1 \text{ m}^2.$$

18.55. Aria laterală este $\frac{(20 + 30)18}{2} = 450$ cm². Pentru a se calcula volumul se află ariile celor două baze şi înălţimea trunchiului de con. O secţiune prin axa trunchiului de con are forma unui trapez cu bazele cît diametrele de la bazele trunchiului, iar laturile neparalele egale cu 18 cm. Înălţimea trapezului este şi înălţimea trunchiului. Se aplică formula de la exerciţiul precedent.

18.56. Jumătate din butoi fiind aproximativ egal cu un trunchi de con avînd $R = 90$ cm, $r = 60$ cm şi $I = 180$ cm, volumul butoiului este dat de formula $V = 2\,\frac{\pi I(R^2 + r^2 + Rr)}{3} = 6\,443\,000$ cm³ $= 6\,443$ dm³ $= 6\,443$ litri.

18.57. Aria sferei $S = 4\pi R^2 = 10$; de unde $R = \sqrt{\frac{10}{4\pi}} = \sqrt{\frac{1\,000}{1\,256}} = \sqrt{0{,}7969} \cong 0{,}892$ m.

Volumul sferei este $V = \frac{4\pi R^3}{3} = S\frac{R}{3}$, deci

$$V = \frac{10 \cdot 0{,}892}{3} = \frac{8{,}92}{3} \cong 2{,}973 \text{ m}^3 = 2\,973 \text{ dm}^3.$$

18.58. Fie O centrul sferei şi AB un diametru al cercului secţiunii în sferă, C centrul secţiunii, iar I vîrful conului format, Avem: $OA = OB = 2$; $OC = 1{,}2$; $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6$. Generatoarea conului este AI, iar înălţimea conului este CI. Avem:

$$CI = \frac{AC^2}{OC} = \frac{2.56}{1{,}2} = 2{,}133;\ OI = 1{,}2 + 2{,}133 = 3{,}333.$$

$AI = \sqrt{OI \cdot CI} = \sqrt{3{,}333 \cdot 2{,}133} = 2{,}666$. Aria calotei este dată de formula $A = 2\pi Ra$, unde a este egală cu grosimea calotei $R - d = 2 - 1{,}2 = 0{,}8$ m. Aria laterală a conului este $\pi RG = 3{,}14 \cdot 1{,}6 \cdot AI = 3{,}14 \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}666 \cong 13{,}39$ m².

18.59. Masa planetei Marte este 0,11 din masa Pămîntului, deci aproximativ de 9 ori este mai mare masa Pămîntului ca a lui Marte.

18.60. Densitatea medie a Soarelui este aproximativ 1,4 g/cm³.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIX

19.1. 10 zile; 15 zile.

19.2. $\frac{47}{182}$.

19.3. 14 lei; 17 m; 13 m.

19.4. $8\frac{4}{33}$.

19.5. 1 400 q, 100 lei; 1 000 q, 120 lei, 600 q, 140 lei.

19.6. $37\frac{39}{40}$.

19.7. 80 tone; 120 tone.

19.8. $\frac{2}{5}$.

19.9. 30 zile; 20 zile.

19.10. $\frac{x-y+1}{x+y-1}$.

19.11. 40 km.

19.12. $6\frac{13}{28}$.

19.13. 9,6 kg; 6 kg.

19.14. 800 lei; 600 lei.

19.15. $3\frac{3}{4}$ km.

19.16. $2\frac{1}{2}$.

19.17. 220; 110.

19.18. 4.

19.19. 12 t; 30 t.

19.20. 30 km/oră; 40 km/oră; 45 km/oră; 360 km.

19.21. 250 lei; 170 lei.

19.22. 28 piese; 32 piese.

19.23. $\frac{5}{6}$.

19.24. 32 tineri, 22 tineri.

Scanned with OKEN Scanner

19.25. 1.

19.26. 100 ha; 25 ha.

19.27. $\frac{867}{1\,600}$.

19.28. 300 piese; 400 piese; 115%.

19.29. 2.

19.30. 15 tractoriști; 10 tractoriști; 921,60 lei.

19.31. $2\frac{4}{5}$.

19.32. 1.

19.33. 80 lei; 100 lei.

19.34. 9 băieți; 7 fete.

19.35. 3 000 000 lei; 500 000 lei.

19.36. 1.

19.37. Cu 24 mașini; cu 16 mașini.

19.38. $1\frac{1}{2}$.

19.39. $\frac{2}{3}$.

19.40. 2 000 elevi.

19.41. $\frac{1}{50}$.

19.42. $4\frac{43}{75}$.

19.43. 24 q; 39 q.

19.44. 30 m.

19.45. 90 ha; 120 ha; 30 ha.

19.46. $4\frac{1}{38}$.

19.47. 20 tractoriști; 15 tractoriști.

19.48. 205.

19.49. 120 piese; 38 piese.

19.50. 1 960 elevi; 3 000 elevi.

19.51. 200 elevi; 125 elevi; 278 elevi; 130 elevi.

Scanned with OKEN Scanner

19.52. $\frac{1}{28}$.

19.53. 1 050 t; 700 t.

19.54. $1\frac{7}{2\,400}$.

19.55. 60 km/oră; 50 km/oră; 260 km.

19.56. $1\frac{203}{1\,700}$.

19.57. 204 q; 264 q.

19.58. $\frac{a^2(a+2x)}{a^2-x^2}$.

19.59. 180 piese.

19.60. 3,75 milioane lei; 4,5 milioane lei.

19.61. 1 950.

19.62. 1 500 q; 299 q.

19.63. 25.

19.64. 160 muncitori; 20 piese.

19.65. $\frac{35}{72}$.

19.66. 1 300 uniforme; 650 uniforme.

19.67. 310 t.

19.68. $41\frac{22}{105}$.

19.69. $6\frac{11}{36}$.

19.70. 13 t; 6,5 t.

19.71. $2\frac{22}{75}$.

19.72. 120 km; 128 km; 142 km; 600 km.

19.73. $1\frac{67}{128}$.

19.74. *a)* 15 m²; *b)* 9 m²; *c)* 3 m².

19.75. *a)* $E(x)=\frac{3x-1}{1-x}$; *b)* Ecuația $E(x)=-3$ este imposibilă; $\frac{3x-1}{1-x}=-3 \Leftrightarrow 3x-1=-3+3x \Leftrightarrow -1=-3$, ceea ce este imposibil. *a)* $x=\frac{4}{9}$.

Scanned with OKEN Scanner

19.76. *a)* 15 cm, 20 cm, 25 cm; *b)* $15^2 + 20^2 = 25^2$; *c)* 150 cm².

19.77. Ecuația este imposibilă. Expresia din primul membru al ecuației este definită pentru $x \in R - \left\{3\frac{1}{3}\right\}$. Rezolvînd ecuația se obține $x = 3\frac{1}{3}$ adică tocmai valoarea pentru care expresia nu este definită.

19.78. 26 km.

19.79. 4.

19.80. 324 ha; 34 ha; 74 ha.

19.81. 55.

19.82. 1 200 lei; 1 800 lei.

19.83. 0.

19.84. 65 vase.

19.85. 6.

19.86. 137 cisterne.

19.87. $x = 3$; $y = -5$.

19.88. 72 cm și 15 cm.

19.89. 6.

19.90. 288 t; 455 t.

19.91. $\frac{16}{45}$.

19.92. $5\frac{70}{221}$.

19.93. 1.

19.94. $x = 2\frac{1}{2}$; $y = 4$.

19.95. 380 ha; 500 ha.

19.96. $11\frac{1}{30}$.

19.97. 2 847 kg; 1 518 kg.

19.98. 24 zile.

19.99. 1.

19.100. $\frac{100}{359}$.

19.101. 3 600 m; 4 400 m.

Scanned with OKEN Scanner

19.102. $\frac{25}{64}$.

19.103. 36 camioane; 27 camioane; 18 camioane.

19.104. *a)* $1\,755\,\pi$ g $\cong 5\,513{,}5$ g; *b)* înălțimea prismei și lungimea barei sînt ambele de 9 cm; ipotenuza triunghiului dreptunghic de secțiune și diametrul barei sînt ambele de 10 cm; *c)* $351 \cdot (5 \cdot \pi - 4{,}8)$ g; $\cong 3\,828{,}7$ g.

19.105. 6 cm; 60 cm²; 8 cm; 264 cm²; 288 cm³.

19.106. $\frac{3}{4}$.

19.107. Problema are două soluții:

I *a)* 4 413 cm²; *b)* $8\,622 \cdot \pi$ cm³ $\cong 27\,086{,}812$ cm³; *c)* 30,86%; *d)* 156°07′53″.

II *a)* 10 948,42 cm²; *b)* $22\,452 \cdot \pi$ cm³ $\cong 70\,535{,}038$ cm³; *c)* 31,53%; *d)* 147°48′45″.

19.108. *a)* 10 cm; *b)* $E = \frac{91}{125}$; *c)* $\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{8}$ *d)* cu $3 \cdot (25 \cdot \sqrt{3} - 32)$cm² $\cong 33{,}9$ cm², de $\frac{25 \cdot \sqrt{3}}{32}$ ori $\cong 1{,}35$ ori; *e)* $\frac{75 \cdot \sqrt{3}}{\pi}$ % $\cong 41{,}35$%; *f)* nu, în orice cerc aria triunghiului echilateral înscris reprezintă $\frac{75 \cdot \sqrt{3}}{\pi}$ % din aria cercului; *g)* $x = 3$; *h)* $15 \cdot \sqrt{442}$ cm² $\cong 315{,}36$ cm².

19.109. *a)* 13,5 ha și 10,5 ha; *b)* 54 și 42 lucrători.

19.110. *a)* $E_1(x)$ este definită pentru $x \in R - \{-1, 1\}$; $E_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}$. $E_2(x)$ este definită pentru $x \in R - \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$; $E_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32}$.

b) Media proporțională a expresiilor $E_1(x)$ și $E_2(x)$ este definită pentru $x \in R - \left\{-1{,}0, \frac{1}{2}, 1\right\}$; $A(x) = \sqrt{E_1(x) \cdot E_2(x)} = \frac{|2x - 1|}{2}$.

c) Dacă ne referim la expresia finală (adusă la forma cea mai simplă) a mediei proporționale $A(x) = \frac{|2x - 1|}{2}$, aceasta are sens pentru orice x real.

d) Este de rezolvat ecuația $\frac{|2x - 1|}{2} = 1{,}41\,(6)$ sau $|2x - 1| = 2\frac{5}{6}$.

Pentru $x < \frac{1}{2}$ avem: $1 - 2x = 2\frac{5}{6}$; $x = -\frac{11}{12}$.

Pentru $x > \frac{1}{2}$ avem: $2x - 1 = 2\frac{5}{6}$; $x = 1\frac{11}{12}$.

Există deci două valori ale lui $x\left(-\frac{11}{12}\right.$ și $\left.1\frac{11}{12}\right)$ pentru care $A(x) = 1{,}41\,(6)$.

19.111. 1 800 ha și 1 620 ha.

19.112. 14.

Scanned with OKEN Scanner

19.113. 8.

19.114. *a)* $E = \frac{a^2x - a^2 + 2}{2x - 1(x-1)}$; *b)* $\frac{28}{135}$; *c)* $x \in R - \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

19.115. *a)* 18 dm şi 8 dm; *b)* 65 dm²; *c)* $221\frac{2}{3}\pi$ dm³ $\cong$ 696,386 dm³.

19.116. $508\frac{18}{35}$.

19.117. 30; 300.

19.118. $\frac{1}{11}$.

19.119. *a)* $E(x) = x - 1$; *b)* $E(24) = 23$.

19.120. *a)* $E(x) = 2x$; *b)* $E\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

19.121. $\left(4\frac{1}{2} \cdot \sqrt{91} + 13\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$ dm² $\cong$ 66,31 dm²; $18 \cdot \sqrt{3}$ dm³ $\cong$ 31,178 dm³.

19.122. $5\frac{5}{6}$.

19.123. *a)* $256 \cdot \pi$ cm² $\cong$ 804,25 cm²; $640 \cdot \pi$ cm³ $\cong$ 2 010,619 cm³.

b) $80 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot \pi}{157}}$ cm $\cong$ 25,3 cm.

19.124. $\frac{3\,822}{3\,895}$.

19.125 *a)* 48 m³; *b)* 47,36 tone sau 473,6 hl.

19.126. $\frac{3}{20}$.

19.127. Raportul volumelor este $\frac{16 \cdot \sqrt{3}}{9}$, indiferent de dimensiunile celor două piramide. Raportul ariilor laterale este $\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{4l^2 + l^2}{4l^2 + 3l^2}}$, unde l şi l sînt înălţimea şi respectiv latura bazei piramidei exagonale.

19.128. 74.

19.129. *a)* $15 \cdot \sqrt{809} \cdot \pi$ dm² $\cong$ 1 340,34 dm²;

b) $43{,}68 \cdot \sqrt{471} \cdot \pi$ kg $\cong$ 2 978,121 kg.

19.130. $\frac{x^2 + y^2}{xy}$.

19.131. 12 936 cm², 81 312 cm³.

19.132. 925 kWh, 2 849 kWh.

Scanned with OKEN Scanner

19.133. *a)* $A = \frac{1+x}{1-x}$, $B = \frac{x+1}{x-1}$, $C = \frac{x^2}{1-x}$; *b)* $\frac{x^2}{3(1-x)}$; *c)* $-2\frac{13}{18}$.

19.134. *a)* 30 cm²; *b)* $\frac{12\cdot\sqrt{13}}{13}$ cm $\cong$ 3,3 cm și $\frac{36\cdot\sqrt{97}}{97}$ cm $\cong$ 3,66 cm.
c) 112π cm³ $\cong$ 351,858 cm³; $84\cdot\pi$ cm² $\cong$ 263,89 cm².

19.135. $1\frac{13}{20}$.

19.136. *a)* 18 cm, *b)* $1\,824\,\pi$ cm³ $\cong$ 5 730,265 cm³.

19.137. $\frac{x-y}{x}$, $\frac{3}{4}$.

19.138. $6\frac{1}{5}$.

19.139. *a)* $5\frac{1}{7}$ cm, $3\frac{9}{14}$ cm; *b)* $1\frac{4\,173}{21\,952}\cdot\pi$ grame $\cong$ 5,17 g; *c)* $\frac{903\,125}{1\,009\,792}\cdot\pi$ grame $\cong$ $\cong$ 2,81 g.

19.140. *a)* 96 cm; *b)* $4\cdot\sqrt{97}$ cm $\cong$ 39,4 cm și $8\cdot\sqrt{13}$ cm $\cong$ 28,8 cm;
c) $7\,168\pi$ cm³ $\cong$ 22 518,936 cm³; $1\,344\cdot\pi$ cm² $\cong$ 4 222,30 cm².

19.141. $\frac{9(a^2-b^2)^3}{4b^3}$; 0.

19.142. 8 496 000 m³; $50\,346\,666\frac{2}{3}$ hl.

19.143. $2\frac{1}{2}$ ore; 30 km.

19.144. *a)* $E(x) = \frac{x-1}{2}$; *b)* $E\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$; *c)* $x(a) = 1$.

19.145. 53,5 km.

19.146. $\frac{13}{24}$.

19.147. 34 992 cm³; $9\cdot\sqrt{34}$ cm $\cong$ 52,5 cm.

19.148. 3.

19.149. *a)* 30 cm și 50 cm; *b)* $1\,500\,\pi$ cm² $\cong$ 4 712,39 cm²; $2\,400\pi$ cm² $\cong$ $\cong$ 7 539,82 cm²; $12\,000\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 40 840,704 cm³.

19.150. 1.

19.151. *a)* 40π dm² $\cong$ 125,66 dm²; $52\cdot\pi$ dm³ $\cong$ 163,363 dm³, *b)* 2π dm³ $\cong$ $\cong$ 6,283 dm³.

19.152. *a)* $E(x) = \frac{x-1}{x+1}$; *b)* $E(4) = \frac{3}{5}$.

19.153. 39,96 m³.

Scanned with OKEN Scanner

19.154. $2\frac{8}{9}$.

19.155. *a)* 2,75 m, 16,50 m²; *b)* $41\frac{1}{4}\cdot\pi$ m² $\cong$ 129,59 m², $55\frac{1}{2}\cdot\pi$ m³ $\cong$ 174,538 m³;
c) $555\cdot\pi$ hl $\cong$ 1 743,58 hl.

19.156. *a)* $E_1=\frac{a}{a-b}$, $E_2=\frac{4ab+1}{a^2-b^2}$; $E_3=\frac{4ab+1}{2ab}$; *b)* $x\pm\frac{a+b}{2b}$.

19.157 999 ha cu porumb şi 2 601 cu grîu.

19.158 360,372 cm³; 165,39 cm².

19.159. 51.

19.160. *a)* $3\,600\,\pi$ cm² $\cong$ 11 309,72 cm²;
b) $\frac{800\sqrt{13}}{9}\pi$ cm² $\approx$ 988,87 cm²; $\frac{32\,000\,\pi}{9}$ cm³ $\approx$ 11 170,256 cm³;
c) $\frac{ai^2\pi}{g-a}$; $\frac{a^2i^3\pi}{3(g^2-a^2)}$.

19.161. $9\,293\frac{1}{3}\pi$ tone $\cong$ 29 195,868 t.

19.162. $x=\frac{a-b}{a+b}$, $x=0$, $x=\frac{1}{3}$.

19.163. $26\,124\frac{4}{5}\cdot\sqrt{\frac{314}{\pi}}$ g $\cong$ 261 182,25 g. Dacă se ia $\pi=3{,}14$, se găseşte 261 248 g.

19.164. 1.

19.165. *a)* 42 cm; *b)* $15\cdot\pi$ cm $\cong$ 47,1 cm; *c)* $\frac{1}{2}$. (Raportul ariilor triunghiului echilateral şi exagonului regulat înscrise în acelaşi cerc este $\frac{1}{2}$ indiferent de mărimea razei cercului: $\frac{\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$); *d)* $336\cdot\pi$ cm² $\cong$ 1 055,58 cm².

19.166. $E(x)=\frac{x+2}{x}$; $E(-2)=0$; -4; Expresia nu ia niciodată valoarea 1.

19.167. *a)* $x_1=10$, $x_2=5$; *b)* $a\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

19.168. *a)* 10 cm, 20 cm, 24 cm, 26 cm; 360 cm².
b) $1\,280\cdot\pi$ cm² $\cong$ 4 021,24 cm²; $5\,600\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 17 592,919 cm³.

19.169. 1.

19.170. 1960 m.

19.171. 12.

Scanned with OKEN Scanner

19.172. *a)* 8 cm, 2 cm; *b)* $20\sqrt{13}\cdot\pi$ cm$^2 \cong 226{,}55$ cm^2, $112\cdot\pi$ cm$^3 \cong 351{,}858$ cm^3.

19.173. 1.

19.174. *a)* 3,4 m; 1,6 m; *b)* $\frac{250\cdot(9\sqrt{2}+2{,}56)\cdot\pi}{157}$ kg $\cong$ 76,478 kg. Dacă se ia $\pi = 3{,}14$, se găseşte aproximativ 76,440 kg.

19.175. *a)* $E(x, y) = \frac{x-y}{x(x+y)}$; *b)* $E(5,3) = \frac{1}{20}$.

19.176. *a)* 576 cm^3; *b)* 96 cm^3; *c)* $12(2\sqrt{5}+\sqrt{13})$ cm$^2 \cong 96{,}93$ cm^2.

19.177. *a)* $E(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; *b)* 3; *c)* -1 şi 1.

19.178. *a)* $60\cdot\pi$ cm$^2 \cong 188{,}50$ cm^2, $96\cdot\pi$ cm$^2 \cong 301{,}59$ cm^2, $576\cdot\pi$ cm$^3 \cong 1\,809{,}557$ cm^3; *b)* $36\cdot\pi$ cm$^2 \cong 113{,}10$ cm^2, $36\cdot\pi$ cm$^3 \cong 113{,}097$ cm^3.

19.179. *a)* $E(x) = \frac{2}{x^2-9}$; *b)* $x_1 = -5$, $x_2 = 5$.

19.180. *a)* 54 cm; *b)* suma a două laturi opuse este egală cu suma celorlalte două laturi opuse.

19.181. *a)* $E(x, y) = \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; *b)* $x_1 = \frac{(1-\sqrt{2})}{3}$, $x_2 = \frac{2(1+\sqrt{2})}{3}$.

19.182. *a)* $l = 3$; *b)* $300\cdot\pi$ u$^2 \cong 942{,}48$ u^2; $516\cdot\pi$ u$^3 \cong 1\,621{,}062$ u^3.

19.183. $230\frac{2}{5}\cdot\pi$ unităţi de volum $\cong 723{,}823$ unităţi de volum; $153\frac{3}{5}\cdot\pi$ unităţi de suprafaţă $\cong 482{,}55$ unităţi de suprafaţă.

19.184. 1) $E(a) = \frac{2(a-1)}{a}$; 2) $E(2) = 1$.

19.185. *a)* 20 cm; *b)* $y = 2x^2$; *c)* graficul este o jumătate de parabolă cu vîrful în originea axelor de coordonate.

19.186. $x = 4\frac{2}{7}$. Fracţiile ordinare ai căror numitori conţin ca factori primi şi alte numere în afară de 2 şi 5 se transformă în fracţii periodice. Avînd numitorul 7, fracţia ce reprezintă valoarea lui x se va transforma în fracţie periodică. $x = 4{,}(285\,714)$.

19.187. *a)* $x = \frac{1}{15}$; *b)* 7 conuri; $31\frac{1}{9}$ %.

19.188. $\frac{227}{444}$.

19.189. $4(4a^2-b^2)$ cm^2; $16a(2a-b)$ cm^2; $\frac{8(2a-b)^2\sqrt{2ab}}{3}$ cm^3; $4(2a-b)\sqrt{ab}$ cm^2. În cazul aplicaţiei numerice: 60 cm^2; 96 cm^2; $24\sqrt{2}$ cm$^3 \cong 33{,}941$ cm^3; $12\sqrt{2}$ cm$^2 \cong 16{,}97$ cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

19.190. $17\frac{11}{16}$.

19.191. 140 cm², 256 cm², 208 cm³.

19.192. 4.

19.193. *a)* $2\frac{7}{19}$; *b)* $16(5+\sqrt{5})\cdot\pi$ cm² $\cong$ 363,73 cm², $138\frac{2}{3}\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 435,634 cm³.

19.194. $E(a,b,c)=\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$; $E\left(5,-3\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-1\frac{3}{4}$.

19.195. *a)* $8\cdot\left[9-\left(\frac{157}{200\cdot\pi}\right)^2\right]\cdot\pi$ m³ $\cong$ 224,625 m³. Dacă se ia $\pi=3{,}14$, se găsește aproximativ 224,510 m³.

b) 19 foi de tablă. Dacă se ia $\pi=3{,}14$ se găsește ca număr al foilor de tablă: 20.

19.196. $E(x,y)=\frac{x}{y+1}$; $E(10,2)=3\frac{1}{3}$.

19.197. 9 lei; 8 lei.

19.198. $\frac{1}{3}$.

19.199. 96 cm²; 48 cm³.

19.200. $\frac{324}{4\,225}$.

19.201. *a)* 1 998 cm², 4 860 cm³; *b)* $\frac{135\sqrt{3}}{2}$ cm $\cong$ 116,9 cm.

19.202. $\frac{13}{18}$.

19.203. *a)* $24\sqrt{3}$ cm² $\cong$ 41,57 cm²; *b)* $\frac{112\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³ $\cong$ 203, 148 cm³.

19.204. $3\frac{1}{3}$.

19.205. *a)* $24\sqrt{3}$ cm² $\cong$ 41,57 cm²; *b)* $64\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 201,062 cm³.

19.206. $x=1$, $y=2$.

19.207. $128\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 402,124 cm³.

19.208. $1\frac{25}{29}$.

19.209. $12\,000\cdot\pi$cm³ $\cong$ 37 699,112 cm³.

19.210. $6\frac{2}{3}$.

19.211. $96\cdot\pi$cm² $\cong$ 301,59 cm²; $96\cdot\pi$cm³ $\cong$ 301,593 cm³.

19.212. 1.

19.213. $90\cdot\pi$ cm² $\cong$ 282,74 cm²; $108\cdot\pi$cm³ $\cong$ 339,892 cm³.

19.214. $1\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

19.215. 27,5 ha; 11 ha; 10 ha.

19.216 $M_1 = \dfrac{\frac{1}{4}+9}{2} = 4\frac{5}{8}$; $M_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 9} = 1\frac{1}{2}$.

19.217. *a)* 148 cm²; *b)* $608\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 1 910,088 cm³.

19.218. $\frac{1}{3}$.

19.219. $48\cdot\pi$ cm² $\cong$ 150,80 cm²; $40\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 125,664 cm³.

19.220. $\frac{1}{3}$.

19.221. $24\cdot\pi$ cm² $\cong$ 75,40 cm²; $12\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 37,699 cm³.

19.222. 4.

19.223. Problema admite două soluţii:

I. $A = 67{,}2\cdot\pi$ cm² $\cong$ 211,12 cm²; $V = 76{,}8\cdot\pi$cm³ $\cong$ 241,274 cm³.

II. $A = 75\frac{489}{1\,445}\cdot\pi$ cm² $\cong$ 236,68 cm²; $V = 91\frac{6\,073}{24\,565}\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 286,658 cm³.

19.224. $-3\frac{11}{610}$.

19.225. *a)* $105\cdot\pi$ cm² $\cong$ 329,87 cm²; *b)* $230\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 722,566 cm³.

19.226. 0.

19.227. *a)* $240\cdot\pi$ cm² $\cong$ 753,98 cm², $528\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 1 658,761 cm³;
b) Cele două arii sînt egale; *c)* 36 cm.

19.228. 36.

19.229. $151{,}2\cdot\pi$ cm² $\cong$ 475,01 cm²; $259{,}2\cdot\pi$ cm³ $\cong$ 814,301 cm³.

19.230. 1.

19.231. $19\frac{1}{5}\cdot\pi$ unităţi de volum $\cong$ 60,319 unităţi de volum;

$40\frac{4}{5}\cdot\pi$ unităţi de suprafaţă $\cong$ 128,18 unităţi de suprafaţă.

19.232. 1.

19.233. 253 de flacoane.

19.234. *a)* Numărul de căni este dat de $n = \frac{1\,256}{5\cdot\pi}$. Luînd pentru π valoarea 3,14, se obţine $n = 80$. În realitate, nu se pot obţine decît 79 căni, pentru că luînd pe π cu o aproximaţie mai bună ($\pi = 3{,}14159\ldots$), se obţine $n = 79{,}895\ldots$

b) $l = 5\cdot(9\sqrt{3}+2)$ cm $\cong$ 88 cm; $\dfrac{(247+36\sqrt{3}-79\cdot\pi)\cdot 100}{247+36\sqrt{3}}\,\% \cong 19{,}77\,\%$.

19.235. $E(a,b) = \dfrac{11a+b}{6(a-b)}$; $E\left(\frac{1}{8}, 3\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}$.

19.236. *a)* 135°; *b)* $16\cdot(13+5\sqrt{2})\cdot\pi$ cm² $\cong$ 1 008,89 cm²;
c) $3\,161{,}6\cdot(\pi-2)$g $\cong$ 3 609,3 g.

Scanned with OKEN Scanner

19.237. *a)* $F(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x^2 - 1}$; *b)* $F(-3) = 1\frac{1}{8}$; *c)* $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

19.238. *a)* $300 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \cong 942{,}48\ \text{cm}^2$, $1\,824 \cdot \pi\,\text{cm}^3 \cong 5\,730{,}265\ \text{cm}^3$; *b)* 337,50%.

19.239. *a)* $E_1(x) + E_2(x) = \frac{1 - 2x}{1 - x} + \frac{2 - x}{1 - x} = \frac{3 - 3x}{1 - x} = 3$; *b)* $F(12) = 0{,}3$;

c) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

19.240. 320 unităţi de arie; 576 unităţi de arie; 512 unităţi de volum.

19.241. 1.

19.242. *a)* 17 cm, 7 cm; *b)* 45°; *c)* 7 680 cm^3.

19.243. $a = -(2x + 1)$; $b = \frac{x + 1}{x}$.

19.244. *a)* Se demonstrează că în patrulaterul $ADCF$ diagonalele sînt egale şi se împart în părţi egale; *b)* $32 \cdot \pi\ \text{cm}^3 \cong 100{,}531\ \text{cm}^3$.

19.245. $E(a,b) = \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}$; $E\left(1, -\frac{1}{4}\right) = 2\frac{4}{15}$.

19.246. *a)* 550 ha; *b)* 246,60 ha, 180,84 ha, 120,56 ha.

19.247. *a)* $E_1(x) = 3(2x - 1)(x - 2)$, $E_2(x) = 9x(x - 2)^2$, $\frac{E_1(x)}{E_2(x)} = \frac{2x - 1}{3x(x - 2)}$;

b) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 5$.

19.248. *a)* 27 ari; *b)* 1 080 ari; *c)* 864 ari; 81 ari, 108 ari.

19.249. *a)* $E_1(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$, $E_2(x) = \frac{2(x - 1)}{3(x + 1)}$; *b)* $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

19.250. *a)* 80 de piese; *b)* 6,25%; *c)* 1 104 piese.

19.251. $E(a,b) = \frac{1}{a + 6b}$; $E\left(8, \frac{1}{3}\right) = 0{,}1$.

19.252. *a)* 318 000 lei; *b)* 180 000 lei; *c)* 120 000 lei; *d)* 112 500 lei; *e)* 101 250 lei; *f)* 63 910 lei; *g)* 164 340 lei.

19.253. *a)* $E(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$; *b)* $E(4,2) = \frac{4}{5}$.

19.254. *a)* $5{,}4 \cdot \pi\ \text{m}^2 \cong 16{,}96\ \text{m}^2$; $2{,}58 \cdot \pi\ \text{m}^3 \cong 8{,}105\ \text{m}^3$.

19.255. *a)* $E(x) = \frac{6x + 1}{7x(x + 2)}$; *b)* $E(1) = \frac{1}{3}$.

19.256. *a)* Se demonstrează că $\sphericalangle MBA + \sphericalangle ABN = 2$ dr, fiecare dintre unghiuri fiind înscris într-un semicerc. *b)* $\frac{1}{4}$. *c)* $1\frac{7}{9}$; $96\,\pi\ \text{cm}^2 \cong 301{,}59\ \text{cm}^2$; $96\,\pi\ \text{cm}^3 \cong 301{,}593\ \text{cm}^3$.

19.257. *a)* $E(x) = \frac{9}{2x - 3}$. *b)* $\left\{6, 3, 2, 1\frac{3}{4}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{5}{8}, \ldots, \frac{3(k + 3)}{2k};\ k \in N\right\}$.

c) Funcţia se reprezintă grafic printr-o dreaptă care intersectează axele de coordonate în punctele $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ şi $B\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$.

19.258. *a)* 588 dm^3; *b)* 15 dm; *c)* 240 dm^2; *d)* 2 dm.

19.259. *a)* $E(x) = x^2 - 2x + 2$; *b)* $\{-1, 3\}$.

Scanned with OKEN Scanner